

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND X, HEFT 2—3

MIT 43 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 23. JULI 1956)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG

1956



Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)  
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5  
Tel. U 26 5 60, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag.

Band X, Heft 2—3

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
A. Basch, Paul Funk. Zum 70. Geburtstag .....	117
<i>Originalarbeiten</i>	
A. Basch, Eine konstruktive Bestimmung der Haupttrichtungen und Eigenfrequenzen der Schwingungen eines Systems von zwei Freiheitsgraden. (Mit 1 Textabbildung) .....	119
E. R. Berger, Die Variationsprinzipien der Elastostatik in der Theorie zweiter Ordnung ...	124
R. Bruniak, Über die Ablösung der Grenzschicht beim Verdichtungsstoß. (Mit 1 Textabbildung) .....	129
F. Chmelka, Wärmespannungen in einem Prandtl-Reußschen Körper .....	133
G. Doetsch, Stabilitätsuntersuchung von Regelungsvorgängen mittels Laplace-Transformation .....	140
W. Eberl, Zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Deutung gewisser Mannschaftswettkämpfe ..	148
H. Fieber, Über das Temperaturfeld in längs einer Richtung bewegten und zeitlich veränderlichen Bereichen. (Mit 1 Textabbildung) .....	155
W. F. Gauster, Über Oberflächeneffekte beim elektrischen Durchbruch von Flüssigkeiten ..	160
W. Glaser, Elektronische Abbildung als Eigenwertproblem .....	167
W. Gröbner, Über die Berücksichtigung der Reibung bei Schwingungsproblemen .....	171
G. Heinrich, Zur Stabilität der Strickleiter. (Mit 2 Textabbildungen) .....	175
J. E. Hofmann, Zur Bestimmung bogengleicher algebraischer Kurven zu Beginn des 18. Jahrhunderts. (Mit 2 Textabbildungen) .....	190
H. Hornich, Zur Lösbarkeit der hyperbolischen Differentialgleichungen .....	195
C. Kämmerer, Reibungsbeiwert und adiabater Wirkungsgrad für eine geradkegelig erweiterte Verdichtungsdüse (Unterschalldiffusor) .....	197
K. Karas, Die Schirmschwingungen der Kreismembran unter allgemeinen Bedingungen. (Mit 3 Textabbildungen) .....	200
H. W. König, Kinetische Energiedichte und kinetischer Leistungsfluß in Elektronenströmungen. (Mit 2 Textabbildungen) .....	221
W. Müller, Über die Gleit- und Sturzbewegung eines Flugzeuges bei großer statischer Stabilität. (Mit 6 Textabbildungen) .....	225
H. Nowotny, Verschleiß — ein physikalisch-chemisches Problem. (Mit 8 Textabbildungen) ..	232
K. Oswatitsch, Über eine Verallgemeinerung des Potentials auf Strömungen mit Drehung ..	239
H. Parkus, Periodisches Temperaturfeld im Keil .....	241
W. Peschka, Die Schallgeschwindigkeit in dissoziierenden Gasen. (Mit 2 Textabbildungen) ..	244

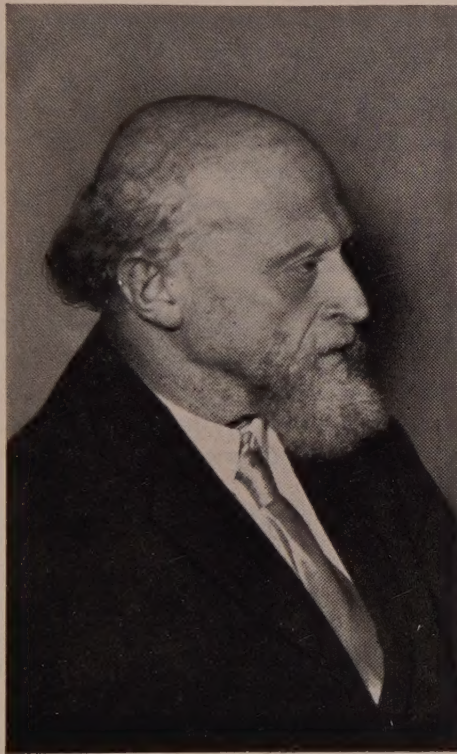
Fortsetzung auf der III. Umschlagseite



## Paul Funk

### Zum 70. Geburtstag

Zu einer Würdigung Paul Funks die Feder zu ergreifen, ist eine vielleicht nicht sehr dankbare Aufgabe. Unser Jubilar, das wissen alle, die ihn kennen, ist jedweder Ehrung, jedem in den Mittelpunkt des Geschehens gestellt werden, durchaus abhold. Hiezu kommt noch, daß Funk wie kaum ein anderer der Zunft der Biographen ihr Handwerk erschwert, daß, wo er selbst gezwungen war, die Geschichte seiner Entwicklung anzudeuten, er diese Aufgabe in kaum zu übertreffender Dürftigkeit erledigt hat. Im übrigen bewegt sich sein äußerer Lebenslauf in unauffälliger Mitte zwischen dem des über die Grenzen der Heimat nie Hinausgekommenen, mit ihr daher zeit lebens Verbundenen, und dem des Wanderers.



Paul Funk wurde am 14. April 1886 zu Wien geboren, hat ohne an den Instituten der Wiener Universität so richtig Wurzel zu fassen. Es entsprach mehr einem plötzlichen Einfall als der Verfolgung eines Planes, daß er der Anregung eines Freundes, eines Naturwissenschaftlers, folgte und mit ihm an die Universität Göttingen übersiedelte, wo für Funk die entscheidende Entwicklung begann. Er wurde Schüler D. Hilberts und 1911 auf Grund einer später in den Mathematischen Annalen (74. Bd., S. 278 bis 300, 1913) veröffentlichten Arbeit „Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien“ zum „Doktor der Naturwissenschaften“ promoviert. Funk war in Göttingen aber auch ein eifriges Mitglied der jungen Schule der Angewandten Mathematik, die sich um Felix Klein gebildet hatte. Die von Hilbert und Klein einerseits auf dem Gebiete der Geometrie und Variationsrechnung, anderseits

aber seine Mittelschuljahre erst in Baden bei Wien, dann in Gmund verbracht und ein Hauch ländlich-alpiner Frische ist für immer an ihm haften geblieben. Funk entschied sich für das Studium der Mathematik und Physik. Das Wandern von einer hohen Schule zur anderen, ein einst an deutschen Universitäten eingelebter Brauch, war in Österreich niemals in gleichem Maße eingedrungen. Aber unserem Jubilar lag diese Sitte. So begann er an der Universität Tübingen, wo A. Brill sein Lehrer war, kehrte aber schon nach einem Jahr nach Wien zurück,



auf dem Gebiete der angewandten Mathematik, insbesondere der Mechanik empfangenen Anregungen waren für das weitere Schaffen Funks und seine Denkweise von ausschlaggebender Bedeutung.

Nach Wien zurückgekehrt, legte Funk an der Wiener Universität die Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik ab und ließ — er wollte auch als Prophet im eigenen Vaterlande gelten — sein Doktordiplom mit der in Österreich heimischen Bezeichnung „Doktor der Philosophie“ nostrifizieren, was mit einer Prüfung aus Philosophie bei A. Stöhr und R. Reininger verbunden war, von der er oft in launiger Weise erzählte. Hierauf absolvierte Funk — er hatte damals noch nicht die Absicht, die akademische Laufbahn anzustreben — das Probejahr in Salzburg, währenddessen er oft mit seinen Schülern die nähere und weitere Umgebung der Stadt auf winterlichen und sommerlichen Bergfahrten durchstreifte.

Dann aber erfolgte die Wendung. Funk kam nach Prag, wo er seit 1913 bei K. Carda und zuerst auch bei W. Blaschke als Assistent für Mathematik an der Deutschen Technischen Hochschule wirkte. 1915 habilitierte er sich an der Deutschen Universität in Prag, wo damals G. Pick und G. Kowalewski die Ordinariate einnahmen, für das Gesamtgebiet der Mathematik. Seine Lehrbefugnis wurde bald darauf an die Deutsche Technische Hochschule übertragen, an der Paul Funk 1921 zum außerordentlichen und 1927 zum ordentlichen Professor ernannt wurde.

1939 mußte Funk sich von seiner Tätigkeit zurückziehen, aber schon mit 1. Januar 1946 erfolgte seine Ernennung zum ordentlichen Professor an seiner jetzigen Wirkungsstätte, der Technischen Hochschule in Wien.

In Prag setzte Funk seine geometrischen Arbeiten, die der Variationsrechnung entstammten, fort, wobei sich der Verkehr mit W. Berwald als sehr anregend erwies. Für die Anwendung der Mathematik wurde das von ihm gemeinsam mit Th. Pöschl geschaffene Kolloquium für Angewandte Mathematik und Mechanik zu einem Mittelpunkt, an dem auch C. Körner, Professor des Maschinenbaues, und andere Vertreter der Praxis lebhaften Anteil nahmen. Und dieses Kolloquium hat Funk sehr bald an seine neue Wirkungsstätte, die Technische Hochschule in Wien, verpflanzt. Es möglichst abwechslungsreich zu gestalten, immer neue Vortragende zu gewinnen, hierbei Vertreter der verschiedensten Anwendungsgebiete zu Wort kommen zu lassen, bildet Funks ständiges Streben.

Neben zahlreichen Abhandlungen, die außer dem schon erwähnten Gebiet der Variationsrechnung, die Theorie der Kugelfunktionen, Differenzgleichungen und Stabilitätsfragen betreffen, stammen aus Funks Feder zwei Bücher: „Über die linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen“ (Springer, Berlin, 1920) und, gemeinsam mit H. Sagan und F. Selig verfaßt, „Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung“ (Deuticke, Wien, 1953). Wir sehen der Vollendung seiner langjährigen Arbeit, die ein Buch über Variationsrechnung und ihre Anwendungen zum Ziele hat, erwartungsvoll entgegen.

Funks Interesse galt auch immer dem Gebiete der Geschichte der Mathematik, auf dem er ein reiches Wissen und auch Kenntnis vieler Einzeltatsachen besitzt. Es ist zu wünschen, daß er seine manchmal geäußerte Absicht, als „Emeritierter“ diesem bei uns wenig gepflegten Sondergebiet eine oder die andere Vorlesung zu widmen, verwirklichen wird.

Ehrungen durch Übertragung akademischer Funktionen ist Funk womöglich ausgewichen. Trotzdem bekleidete er 1930/31 zur Zeit der 125-Jahr-Feier der Deutschen Technischen Hochschule in Prag die Würde des Dekans der Allgemeinen Abteilung. Seine wissenschaftliche Bedeutung wurde durch die im Jahre 1950 erfolgte Wahl zum wirklichen Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften unterstrichen.



Wenn Wilhelm Ostwald (Große Männer, 1910) auf dem Gebiete der Naturwissenschaften zwei Forschertypen unterscheidet, die der Klassiker und jene der Romantiker, so ist, wie selten wohl kein Zweifel, daß Funk dem Typus der Romantiker angehört, die einer Fülle von mannigfaltigen und zuweilen überaus weit voneinander abliegenden Ideen nachgehen. Sie wollen von Schülern umgeben sein, denen sie wenigstens einen Teil ihres Ideenreichtums mitteilen können.

Funk ist als warmer Freund der akademischen Jugend bekannt. Seine Kollegen schätzen seine offene Aufrichtigkeit und wissen ganz genau, daß, falls diese lobenswerte Eigenschaft ihn manchmal zu einer gewissen Schärfe der Meinungsäußerung veranlaßt, dies nur aus tiefstem Interesse für die vertretene Sache hervorgeht.

Seit Beginn seines Wirkens in Wien ist Funk einer der Herausgeber des Österreichischen Ingenieur-Archivs. Zahlreiche seiner Kollegen, Freunde und Schüler freuen sich, in dem vorliegenden Hefte dieser Zeitschrift durch ihre Beiträge ihrer Verehrung für Paul Funk aus tiefstem Herzen Ausdruck geben zu können.

A. Basch, Wien

## Eine konstruktive Bestimmung der Hauptrichtungen und Eigenfrequenzen der Schwingungen eines Systems von zwei Freiheitsgraden

Von A. Basch, Wien

Mit 1 Textabbildung

**Zusammenfassung.** Die Schwingung eines Systems von zwei Freiheitsgraden in der Umgebung der stabilen Gleichgewichtslage setzt sich aus zwei harmonischen Schwingungen in den beiden Richtungen zusammen, die sowohl bezüglich der Trägheitsellipse als auch bezüglich der Elastizitätsellipse einander zugeordnet sind. Diese beiden „Hauptrichtungen“ werden mittels einer projektiv-geometrischen Methode bestimmt. Das Verhältnis der Halbmesser der beiden Ellipsen in jeder der beiden Richtungen ergibt die Kreisfrequenz der harmonischen Schwingung in der betreffenden Richtung.

An dieser Stelle wurde gezeigt, daß die ungedämpfte Bewegung eines Systems von zwei Freiheitsgraden in der Umgebung der stabilen Gleichgewichtslage durch zwei voneinander unabhängige Schwingungen in jenen Richtungen darstellbar ist, die sowohl bezüglich der Ellipsen konstanter Lagenenergie als auch bezüglich der Ellipsen konstanter Bewegungsenergie einander zugeordnet sind<sup>1</sup>.

Wenn die Lage des Systems durch die allgemeinen Koordinaten  $q_1$  und  $q_2$  gekennzeichnet ist, so sind die Ellipsen der Schar

$$V = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2 c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2) = \text{konst.} \quad (1)$$

die Lagen konstanter potentieller Energie, wobei  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  ( $D_c = c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0$ ,  $c_{11}, c_{22} > 0$ ) die reduzierten Rückführkräfte bedeuten. Die Ellipse dieser Schar, die der potentiellen Energie Eins entspricht,

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2 c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2) = 1 \quad (2)$$

wird als „Elastizitätsellipse“ bezeichnet.

Die kinetische Energie ist durch

$$T = \frac{1}{2} (m_{11} \dot{q}_1^2 + 2 m_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{22} \dot{q}_2^2) \quad (3)$$

<sup>1</sup> Österr. Ingenieur-Arch. 8, H. 2/3, 83—86 (1954).



gegeben.  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$  sind hierbei die verallgemeinerten Geschwindigkeiten,  $m_{11}, m_{12}, m_{22}$  ( $D_m = m_{11} m_{22} - m_{12}^2 > 0$ ,  $m_{11}, m_{22} > 0$ ) die reduzierten Massen. Die zu den Ellipsen (3) konstanter Bewegungsenergie der Geschwindigkeitsebene konzentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipse der  $q_1, q_2$ -Ebene

$$H(q_1, q_2) = \frac{1}{2} (m_{11} q_1^2 + 2 m_{12} q_1 q_2 + m_{22} q_2^2) = 1 \quad (4)$$

soll als „Trägheitsellipse“ bezeichnet werden.

In Abb. a bilden die Koordinaten  $q_1$  und  $q_2$  ein rechtwinkliges Achsenkreuz. Zur richtigen Zeichnung der Elastizitätsellipse  $e_c$  dienen die Koordinaten

$$a_{11} = \pm \sqrt{\frac{2 c_{22}}{D_c}}, \quad a_{12} = \mp \frac{c_{12} \sqrt{2}}{\sqrt{c_{22} D_c}} \quad (5a)$$

der Berührungspunkte  $A_1$  und  $A_2$  (Abb. a) der zur  $q_2$ -Achse parallelen und jene der Berührungspunkte  $A_3$  und  $A_4$  der zur  $q_1$ -Achse parallelen Tangenten

$$a_{21} = \mp \frac{c_{12} \sqrt{2}}{\sqrt{c_{11} D_c}}, \quad a_{22} = \pm \sqrt{\frac{2 c_{11}}{D_c}} \quad (5b)$$

sowie die Abszissen der Schnittpunkte  $A_5$  und  $A_6$  mit der  $q_1$ -Achse und die Ordinaten der Schnittpunkte  $A_7$  und  $A_8$  mit der  $q_2$ -Achse

$$\left. \begin{aligned} a_{10} &= \pm \sqrt{\frac{2}{c_{11}}} = \pm \sqrt{a_{11}^2 - a_{21}^2}, \\ a_{20} &= \pm \sqrt{\frac{2}{c_{22}}} = \pm \sqrt{a_{22}^2 - a_{12}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5c)$$

Analog sind die kennzeichnenden, von den reduzierten Massen abhängigen Maßgrößen der Trägheitsellipse  $e_m$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= \pm \sqrt{\frac{2 m_{22}}{D_m}}, \quad b_{12} = \mp \frac{m_{12} \sqrt{2}}{\sqrt{m_{22} D_m}}, \quad b_{21} = \mp \frac{m_{12} \sqrt{2}}{\sqrt{m_{11} D_m}}, \quad b_{22} = \pm \sqrt{\frac{2 m_{11}}{D_m}}, \\ b_{10} &= \pm \sqrt{\frac{2}{m_{11}}} = \pm \sqrt{b_{11}^2 - b_{21}^2}, \\ b_{20} &= \pm \sqrt{\frac{2}{m_{22}}} = \pm \sqrt{b_{22}^2 - b_{12}^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

und die Bezeichnungen der analogen Berührungspunkte beziehungsweise Schnittpunkte  $B_1$  bis  $B_8$ .

Gestalt und Lage von Elastizitätsellipse und Trägheitsellipse (damit auch die der Scharen der Ellipsen konstanter Lagen- und konstanter Bewegungsenergie) sind durch je zwei Zahlen festgelegt, die die betreffenden Kurven bis auf eine Ähnlichkeitsstreckung bestimmen: das Kräftestreuungsverhältnis

$$\kappa_c = \frac{a_{22}}{a_{11}} = \sqrt{\frac{c_{11}}{c_{22}}} \quad (7a)$$

und die Kräftekopplungszahl

$$\varrho_c = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = - \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11} c_{22}}} \quad (7b)$$

und analog das Massenstreuungsverhältnis und die Massenkopplungszahl

$$\kappa_m = \frac{b_{22}}{b_{11}} = \sqrt{\frac{m_{11}}{m_{22}}}, \quad \varrho_m = \frac{b_{12}}{b_{22}} = \frac{b_{21}}{b_{11}} = - \frac{m_{12}}{\sqrt{m_{11} m_{22}}}. \quad (8)$$

Die beiden Kopplungszahlen  $\varrho_c$  und  $\varrho_m$  liegen immer im Bereiche  $(-1, +1)$ .



Bei Verwendung der Ausdehnungen in den Koordinatenrichtungen und der Kopplungszahlen nehmen die Gleichungen von Elastizitätsellipse und Trägheitsellipse (2) und (4) die Formen an:

$$\left. \begin{aligned} a_{22}^2 q_1^2 - 2 \varrho_c a_{11} a_{22} q_1 q_2 + a_{11}^2 q_2^2 &= (1 - \varrho_c^2) a_{11}^2 a_{22}^2, \\ b_{22}^2 q_1^2 - 2 \varrho_m b_{11} b_{22} q_1 q_2 + b_{11}^2 q_2^2 &= (1 - \varrho_m^2) b_{11}^2 b_{22}^2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Zu der durch die Neigung  $\delta = q_2 : q_1$  gegebenen Richtung ist die durch  $\delta'$  gegebene zugeordnet, die für beide Ellipsen die gleiche sein soll. Dies ergibt

$$\delta' = \frac{a_{22}}{a_{11}} \cdot \frac{a_{22} - \varrho_c a_{11} \delta}{\varrho_c a_{22} - a_{11} \delta} = \frac{b_{22}}{b_{11}} \cdot \frac{b_{22} - \varrho_m b_{11} \delta}{\varrho_m b_{22} - b_{11} \delta} \quad (10)$$

und bei Einführung der Streuungsverhältnisse nach (7a) und (8)

$$\kappa_c \frac{\kappa_c - \varrho_c \delta}{\kappa_c \varrho_c - \delta} = \kappa_m \frac{\kappa_m - \varrho_m \delta}{\kappa_m \varrho_m - \delta} \quad (11)$$

oder die nach  $\delta$  quadratische Gleichung

$$(\kappa_c \varrho_c - \kappa_m \varrho_m) \delta^2 - (\kappa_c^2 - \kappa_m^2) \delta + \kappa_c \kappa_m (\kappa_c \varrho_m - \kappa_m \varrho_c) = 0 \quad (12)$$

mit dem Lösungspaar

$$\delta = \frac{\kappa_c^2 - \kappa_m^2 \pm \sqrt{(\kappa_c^2 - \kappa_m^2)^2 - 4 \kappa_c \kappa_m (\kappa_c \varrho_c - \kappa_m \varrho_m) (\kappa_c \varrho_m - \kappa_m \varrho_c)}}{2 (\kappa_c \varrho_c - \kappa_m \varrho_m)}. \quad (13)$$

Diese Gleichung ist, wiewohl die rechte Seite ausschließlich die beiden Streuungsverhältnisse und die beiden Kopplungszahlen enthält, im allgemeinen recht unübersichtlich und auch umständlich auszuwerten. Ausnahmen bilden besondere Fälle, von denen zwei hier erwähnt werden mögen:

a) Die eine der beiden Ausgangsellipsen, beispielsweise die Elastizitätsellipse, wäre ein Kreis. Dann ist  $\kappa_c = 1$  und  $\varrho_c = 0$  und

$$\delta = \frac{-(1 - \kappa_m^2) \pm \sqrt{(1 - \kappa_m^2)^2 + 4 \kappa_m^2 \varrho_m^2}}{2 \kappa_m \varrho_m} \quad (14)$$

ergibt die Neigungen der Hauptachsen der anderen Ausgangsellipse, in diesem Falle die der Trägheitsellipse.

b) Die umschriebenen achsparallelen Rechtecke der beiden Ausgangsellipsen wären ähnlich. Dann ist  $\kappa_c = \kappa_m = \kappa$  und für die Neigungen der in beiden Ellipsen einander zugeordneten Richtungen ergibt sich  $\delta^2 = \kappa^2$  oder  $\delta = \pm \kappa$ . Die Hauptrichtungen sind die der Rechtecksdagonalen.

In dem besonderen Fall, daß die beiden umschriebenen achsparallelen Rechtecke Quadrate sind, ergibt sich  $\delta = \pm 1$ . Die einander in beiden Ellipsen zugeordneten Richtungen sind die in diesem Fall gemeinsamen Hauptachsenrichtungen der beiden Ellipsen, die in die Winkelhalbierenden der Koordinatenrichtungen fallen. Sollten die beiden Ausgangsellipsen ähnlich und ähnlich liegend sein ( $\kappa_c = \kappa_m$ ,  $\varrho_c = \varrho_m$ ), so ist jede Richtung Hauptrichtung.

Der Abb. a liegt die Annahme zugrunde, daß  $c_{12} < 0$ , daher  $a_{12}$  und  $a_{21} > 0$ , hingegen  $m_{12} > 0$ , daher  $b_{12}$  und  $b_{21} < 0$  ist. Es liegt also in dem betrachteten Fall positive Kraftkopplungszahl und negative Massenkopplungszahl vor. Diese Annahme erfolgte wegen der deutlicheren Bestimmbarkeit des Paares der in beiden Ellipsen einander zugeordneten Richtungen.

Es ist immer möglich, die beiden Richtungen, die sowohl bezüglich der Elastizitätsellipse (2) als auch bezüglich der Trägheitsellipse (4) einander zugeordnet sind, die „Hauptrichtungen“, durch eine die Methode der projektiven Geometrie verwendende Konstruktion zu bestimmen.



Die Elastizitätseellipse ordnet in Abb. a der Richtung der  $q_1$ -Achse oder des Ellipsendurchmessers  $\alpha_1 = (A_5, A_6)$  die Richtung  $\alpha_1' = (A_3, A_4)$  zu, der Richtung der  $q_2$ -Achse  $\alpha_2 = (A_7, A_8)$  die Richtung  $\alpha_2' = (A_1, A_2)$ . In gleicher Weise sind durch die Trägheitseellipse der Richtung der  $q_1$ -Achse  $\beta_1 = (B_5, B_6)$  die Richtung  $\beta_1' = (B_3, B_4)$ , der Richtung der  $q_2$ -Achse  $\beta_2 = (B_7, B_8)$  die Richtung  $\beta_2' = (B_1, B_2)$  zugeordnet.

Nun werden in Abb. b durch den Punkt  $S$  des Kreises  $k$  als Träger einer Strahleninvolution zu den Richtungen  $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \alpha_2', \beta_1, \beta_1', \beta_2, \beta_2'$  parallele Strahlen ge-

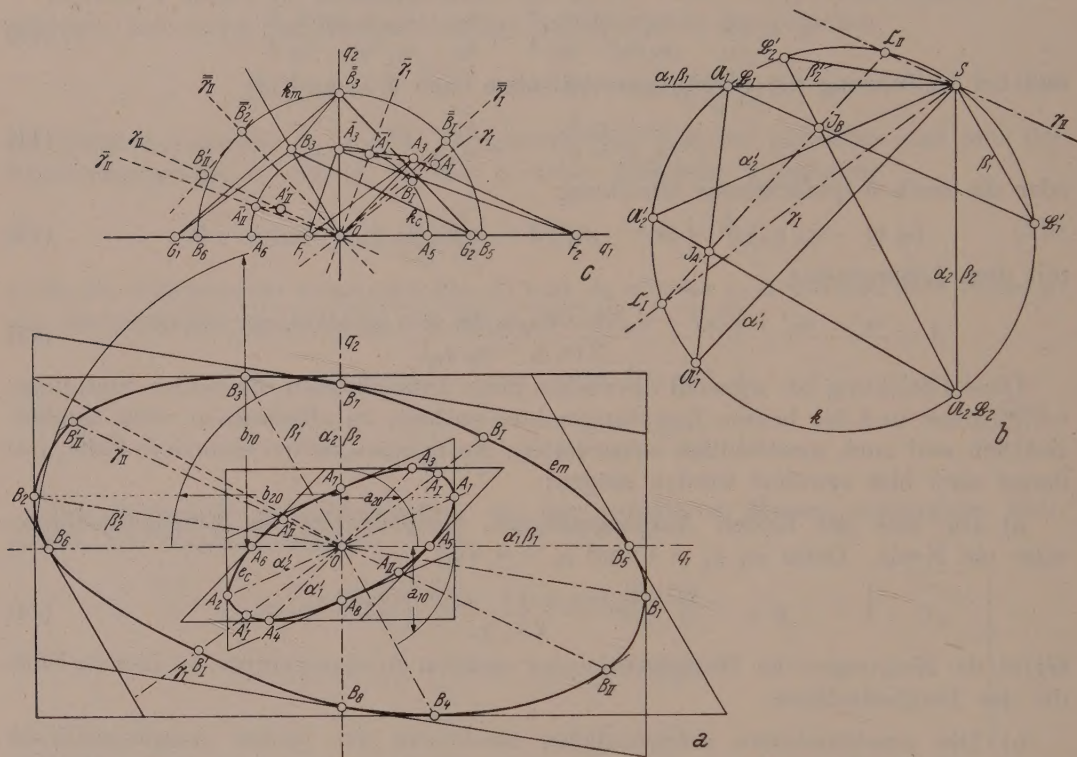


Abb. 1

zogen, wobei  $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$ . Die Strahlen schneiden den Kreis  $k$  in den Punkten  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2', \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_2'$ , wobei wieder  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_2$ . Aus diesen zwei Involutionen bildenden Punkten erhält man als Schnittpunkte der Verbindungsgeraden einander zugeordneter Punkte die beiden Involutionenmittelpunkte

$$\left. \begin{aligned} I_A &= [(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1')(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2')] \\ I_B &= [(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1')(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_2')] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

deren Verbindungsgerade den Kreis  $k$  in den in beiden Punktinvolutionen einander zugeordneten Punkten  $\mathfrak{C}_I$  und  $\mathfrak{C}_{II}$  schneiden. Die Verbindungsgerade dieser Punkte mit dem Träger der Strahleninvolution  $S$  ergeben die in beiden Strahleninvolutionen einander zugeordneten Richtungen  $\gamma_I$  und  $\gamma_{II}$ , die parallel in die Abb. a als die in beiden Ellipsen einander zugeordneten Richtungen übertragen werden können.

Da von beiden Ellipsen in Abb. a je acht verträgliche Punkte mit ihren Tangenten gegeben sind, ist es ja leicht die beiden Ellipsen zu zeichnen und ihre Schnittpunkte mit den beiden Hauptdurchmessern und  $(A_I, A_I', A_{II}, A_{II}', B_I, B_I', B_{II}, B_{II}')$  mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen.



Immerhin sei die der Affingeometrie entsprechende exakte Bestimmung dieser Schnittpunkte hier angedeutet. Sie erfolgt, um die Hauptfigur a nicht zu überladen, in der Hilfsfigur c, in der auch die in  $O$  sich senkrecht schneidenden Koordinatenachsen  $q_I$  und  $q_{II}$  eingetragen sind, ebenso die Hauptrichtungen  $\gamma_I$  und  $\gamma_{II}$  durch  $O$ . Zur Bestimmung der Schnittpunkte mit der Elastizitätsellipse sind die Durchmesser  $A_5 A_6$  und der Halbmesser  $OA_3$  eingetragen. Die Ellipse  $e_e$  wird als Affintransformation des Kreises  $k_e$  mit dem Durchmesser  $A_5 A_6$  angesehen, dessen Schnitt  $\bar{A}_3$  mit der  $q_2$ -Achse das Bild von  $A_3$  in der Kreisebene bildet. Die Schnittpunkte der durch  $A_3$  zu  $\gamma_I$  und  $\gamma_{II}$  gezogenen Parallelen mit der  $q_I$ -Achse geben die Festpunkte  $F_1$  und  $F_2$  der Affintransformation, deren Verbindungsgerade mit  $\bar{A}_3$  die Richtungen der Bilder  $\bar{\gamma}_I$  und  $\bar{\gamma}_{II}$  der Ellipsendurchmesser in der Kreisebene liefern. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreis  $k_A \bar{A}_I$  und  $\bar{A}_{II}$  werden mit Hilfe der zu  $\bar{A}_3 A_3$  parallelen Projektionsstrahlen in die Ellipsendurchmesser  $\gamma_I$  und  $\gamma_{II}$  übertragen, wodurch je einer ihrer Schnittpunkte mit der Ellipse  $e_A A_I$  und  $A_{II}$  bestimmt ist, der wieder in die Hauptfigur a übertragen werden kann.

In vollends analoger Weise kann die Bestimmung der Schnittpunkte  $B_I$  und  $B_{II}$  der konjugierten Durchmesser  $\gamma_I$  und  $\gamma_{II}$  mit der Trägheitsellipse  $e_m$  erfolgen. Um der Abb. c, die eine Hilfsfigur bildet, nicht zu große Ausmaße zu geben, wurde bei Übertragung des Durchmessers  $B_5 B_6$  und des Halbmessers  $OB_3$  aus Abb. a in Abb. c eine Verkleinerung im Verhältnis 1 : 2 vorgenommen und dementsprechend die Vergrößerung der gefundenen Halbmesser  $OB_I$  und  $OB_{II}$  im umgekehrten Verhältnis bei der Rückübertragung in die Hauptfigur a.

Unter Verwendung von Koordinaten  $q_I$  und  $q_{II}$ , die zu den Hauptrichtungen  $\gamma_I$  und  $\gamma_{II}$  parallel sind, erscheinen Lagen- und Bewegungsenergie als quadratische Formen ohne Produktglieder, also

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (c_I q_I^2 + c_{II} q_{II}^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{q_I^2}{a_I^2} + \frac{q_{II}^2}{a_{II}^2} \right), \\ T &= \frac{1}{2} (m_I \dot{q}_I^2 + m_{II} \dot{q}_{II}^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{q}_I^2}{b_I^2} + \frac{\dot{q}_{II}^2}{b_{II}^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$c_I$  und  $c_{II}$  sind die auf die Koordinaten  $q_I$  und  $q_{II}$  reduzierten Rückführkräfte,  $m_I$  und  $m_{II}$  die auf diese Koordinaten reduzierten Massen. Weiters bedeutet  $a_I \sim OA_I$ ,  $a_{II} \sim OA_{II}$ ,  $b_I \sim OB_I$ ,  $b_{II} \sim OB_{II}$ . In den Lagen des Systems, die durch  $A_I$  und  $A_{II}$  gekennzeichnet sind, ist die Lagenenergie Eins. Den Lagen  $B_I$  und  $B_{II}$  entspricht die Bewegungsenergie Eins.

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art ergeben als Folge der Gleichungen (1) und (3) für die Komponentenschwingungen in den Hauptrichtungen die Differentialgleichungen

$$m_I \ddot{q}_I + c_I q_I = 0, \quad m_{II} \ddot{q}_{II} + c_{II} q_{II} = 0. \quad (17)$$

Die den harmonischen Schwingungen in den Hauptrichtungen entsprechenden Kreisfrequenzen sind daher

$$\omega_I = \sqrt{\frac{c_I}{m_I}} = \frac{b_I}{a_I}, \quad \omega_{II} = \sqrt{\frac{c_{II}}{m_{II}}} = \frac{b_{II}}{a_{II}}. \quad (18)$$

Sie sind daher aus Streckenverhältnissen in Abb. a ablesbar. Hierbei müssen aber die Maßstabsbeziehungen der Darstellung berücksichtigt werden. Es darf hier nicht außer acht gelassen werden, daß bei der Einführung der Trägheitsellipse die allgemeinen Koordinaten  $q_I$  und  $q_2$  die allgemeinen Geschwindigkeiten  $\dot{q}_I$  und  $\dot{q}_2$  vertreten und daß hiedurch bei Zeichnung der beiden Ellipsen auch der physikalischen Dimension nach verschiedene Darstellungsmaßstäbe auftreten.



Legen wir den einfachsten Fall zugrunde, in dem beide allgemeine Koordinaten  $q_1$  und  $q_2$  die Dimension von Längen besitzen, bei der Zeichnung der Trägheitsellipse aber Geschwindigkeiten vertreten. Es bedeuten

$$a_I = \sqrt{\frac{2}{c_I}}, \quad a_{II} = \sqrt{\frac{2}{c_{II}}}, \quad b_I = \sqrt{\frac{2}{m_I}}, \quad b_{II} = \sqrt{\frac{2}{m_{II}}}. \quad (19)$$

Somit sind die Dimensionen der in der Abb. a ablesbaren Größen gegeben durch

$$[a] = [M^{-\frac{1}{2}} T], \quad [b] = [M^{-\frac{1}{2}}] \quad (20)$$

und die Dimension des Quotienten

$$\left[\frac{b}{a}\right] = [T^{-1}] \quad (21)$$

und das ist übereinstimmend mit der Dimension der Kreisfrequenz.

Alle durch  $a$  und  $b$  mit irgendwelchem einfachen oder Doppelindex bezeichneten Größen sind in den Darstellungen in Abb. a durch die Beziehung

$$a = \lambda_a \cdot \overline{OA}, \quad b = \lambda_b \cdot \overline{OB} \quad (22)$$

gegeben.  $\lambda_a$  ist der Maßstab bei Zeichnung der Elastizitätsellipse,  $\lambda_b$  der Maßstab bei Zeichnung der Trägheitsellipse. Für die Maßstäbe  $\lambda_a$  und  $\lambda_b$  sowie für den Quotienten  $\lambda_c: \lambda_a$  gelten die Dimensionsgleichungen

$$[\lambda_a] = [L^{-1} M^{-\frac{1}{2}} T], \quad [\lambda_b] = [L^{-1} M^{-\frac{1}{2}}], \quad \left[\frac{\lambda_b}{\lambda_a}\right] = [T^{-1}]. \quad (23)$$

Die beiden Kreisfrequenzen sind aus Fig. a durch die Beziehungen bestimmbar

$$\omega_I = \frac{\lambda_b \cdot \overline{OB}_I}{\lambda_a \cdot \overline{OA}_I}, \quad \omega_{II} = \frac{\lambda_b \cdot \overline{OB}_{II}}{\lambda_a \cdot \overline{OA}_{II}}. \quad (24)$$

Es ergeben sich keine wesentlichen Änderungen dieser Betrachtung, wenn beide allgemeine Koordinaten  $q_1$  und  $q_2$  eine andere Dimension als die der Länge, etwa die Dimension einer Zahl, besitzen, aber auch dann, wenn die beiden Koordinaten verschiedene Dimensionen, die eine etwa die einer Länge, die andere die Dimension einer Zahl besitzt.

(Eingegangen am 22. März 1956)

## Die Variationsprinzipien der Elastostatik in der Theorie zweiter Ordnung

Von E. R. Berger, München

**Zusammenfassung.** Die beiden Variationsprinzipien der Elastostatik, die Sätze von Dirichlet und Menabrea, sind durch die Transformation von Friedrichs miteinander verknüpft. Ausgehend vom Satz von Dirichlet, der auch noch für die Theorie 2. Ordnung gilt, wird mit Hilfe dieser Transformation am Beispiel des geraden Biegestabes ein dem Satz von Menabrea entsprechendes Extremalprinzip für die Theorie 2. Ordnung hergeleitet. Daraus folgt weiter die Formulierung der Arbeitsgleichung für die Theorie 2. Ordnung. Beide Sätze werden auf ein Beispiel angewendet.

### Die Variationsprinzipien der Elastostatik

Nach einem allgemeinen Prinzip, das zum erstenmal von Friedrichs ausgesprochen wurde<sup>1, 2</sup>, läßt sich aus jedem Variationsproblem durch geeignete Trans-

<sup>1</sup> Friedrichs: Ein Verfahren der Variationsrechnung, das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdruckes darzustellen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 13—20 (1929).

<sup>2</sup> Courant-Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, 2. Aufl., Bd. I, S. 201—209. Berlin: Springer-Verlag. 1931.



formation ein zweites herleiten, das dieselbe Lösungsfunktion hat wie das erste. Die beiden zueinander konjugierten Extremalprinzipien nähern den Extremwert von verschiedenen Seiten an.

Auch in der Elastostatik treten zwei derart konjugierte Extremalprinzipien auf: das in der Statik allgemein gültige Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie (Dirichlet) und das ihm entsprechende Prinzip vom Minimum der Ergänzungsarbeit (Menabrea)<sup>3</sup>. Exakt formuliert, lauten die beiden Sätze:

$$\text{I:} \quad -\Pi = A_i - \bar{C}_a \rightarrow \text{Min.} \quad (1)$$

und

$$\text{II:} \quad -\Pi^* = -B_i + \bar{C}_a \rightarrow \text{Max.}, \text{ das heißt } \Pi^* = B_i - \bar{C}_a \rightarrow \text{Min.} \quad (2)$$

Dabei bezeichnet allgemein  $A = \int P ds$  bzw.  $\int \sigma d\varepsilon$  die Arbeit, während der Ausdruck  $B = \int s dP$  bzw.  $\int \varepsilon d\sigma$  von Engesser den Namen „Ergänzungsarbeit“ bekommen hat. Die Summe aus beiden wurde von Zweiling<sup>4</sup> als „Endwertarbeit“ bezeichnet:

$$C = A + B = P \cdot s \quad \text{bzw.} \quad \sigma \cdot \varepsilon.$$

Das erste Extremalprinzip enthält die Arbeit der inneren Kräfte  $A_i$  (die Formänderungsarbeit) und die Endwertarbeit  $\bar{C}_a$  der eingeprägten Kräfte. Das zweite Extremalprinzip enthält die Ergänzungsarbeit der inneren Kräfte  $B_i$  und die Endwertarbeit  $C_a$  der Zwangsverschiebungen, die diese zusammen mit den Reaktionskräften leisten.

An jeder Stelle der Oberfläche muß entweder die Kraft oder die Verschiebung vorgegeben sein (eingeprägte Kraft bzw. Zwangsverschiebung). Elastische Lagerung ist ausgeschlossen bzw. das elastische Lager muß selbst als Teil des elastischen Systems betrachtet werden.

Für das erste Extremalprinzip müssen die Vergleichsfunktionen die geometrischen Bedingungen erfüllen (und daher die Gleichgewichtsbedingungen verletzen); um das sicherzustellen, muß man die Formänderungsarbeit durch die Verschiebungen ausdrücken. Für das zweite Prinzip müssen die Vergleichsfunktionen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen (also die geometrischen Bedingungen verletzen), daher muß die Ergänzungsarbeit durch die Spannungen bzw. die Schnittkräfte ausgedrückt werden, unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen: das Prinzip ist nur anwendbar auf statisch unbestimmte Aufgaben.

Treten auch Verzerrungen durch Temperaturänderung<sup>5, 6</sup> auf,  $\varepsilon_t$ , so ist die Formänderungsarbeit nur aus den elastischen Verzerrungen  $\varepsilon - \varepsilon_t$  zu berechnen. Für das zweite Extremalprinzip denken wir uns die Temperaturverzerrungen zunächst durch „Zwangsverzerrungen“  $-\varepsilon_t$  rückgängig gemacht: die Endwertarbeit dieser Zwangsverzerrungen ist ein Teil von  $\bar{C}_a$ .

Da für die Lösung die beiden Extremalwerte gleich werden, ist

$$\Pi^* - \Pi = A_i + B_i - \bar{C}_a - \bar{C}_a = C_i - C_a = 0. \quad (3)$$

<sup>3</sup> Vgl. etwa Trefftz: Mathematische Elastizitätstheorie, im Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 139.

<sup>4</sup> Zweiling: Gleichgewicht und Stabilität. Berlin: Verlag Technik. 1953. Vorher unter dem Namen von Schleusner: Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipie der Elastizitätstheorie. Stahlbau 11, 185 (1938).

<sup>5</sup> Domke: Die Ergänzungsenergie elastischer Systeme. Eisenbau 12, 100 (1921).

<sup>6</sup> Parkus: Das Prinzip von Castigliano bei wärmebeanspruchten Körpern. Österr. Bauzeitschrift 6, 89—91 (1951).



Da nach dem Energiesatz  $A_i = A_a$  ist, folgt daraus  $B_i = B_a$ . Wenn man diese beiden Beziehungen differenziert, ergeben sich die Sätze von Castigliano:

$$\frac{\partial A_i}{\partial s_k} = P_k, \quad \frac{\partial B_i}{\partial P_k} = s_k. \quad (4)$$

Die Herleitung all dieser Beziehungen kann als bekannt vorausgesetzt werden. Obwohl sie meist nur für lineares Elastizitätsgesetz durchgeführt wird, gelten doch alle diese Sätze im Bereich der Theorie 1. Ordnung ohne weitere Einschränkung, das heißt für beliebiges Elastizitätsgesetz. Allerdings geht dieses noch ein bei der Aufstellung der Ausdrücke für die innere Arbeit bzw. die innere Ergänzungsarbeit. In der Endwertarbeit dagegen tritt das Elastizitätsgesetz auch formal nicht mehr auf (es steckt nämlich in den schon berechneten Verzerrungen). In Gl. (3) können also die beiden Funktionensysteme: Verschiebungen und Verzerrungen einerseits ( $w, \varepsilon$ ), Spannungen und Kräfte andererseits ( $\bar{\sigma}, \bar{P}$ ) völlig unabhängig voneinander gewählt werden. Es ist nur zu fordern, daß die  $w$  und  $\varepsilon$  die geometrischen Bedingungen erfüllen, die  $\bar{\sigma}$  und  $\bar{P}$  untereinander die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. In dieser Form wird die Beziehung (3) als „Arbeitsgleichung“ bezeichnet (Müller-Breslau). Sie dient meist dazu, aus den bekannten Verzerrungen  $\varepsilon$  eine Verschiebung  $w$  zu berechnen, indem man ein System von einer Hilfskraft  $\bar{P}$  und den dazugehörigen Spannungen  $\bar{\sigma}$  überlagert.

Auch die Arbeitsgleichung gilt in der Theorie 1. Ordnung allgemein für jedes Elastizitätsgesetz. Sie ist sogar die einzige von den bisherigen Formeln, die vom Elastizitätsgesetz auch formal unabhängig ist.

### Das zweite Extremalprinzip in der Theorie zweiter Ordnung

In der Theorie 2. Ordnung gilt das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie noch immer, und damit auch der erste Satz von Castigliano. Dagegen versagen die anderen Formeln, wenn man die Ergänzungsarbeit in der bisherigen Form aufstellt. Nach dem Satz von Friedrichs muß aber auch jetzt noch ein konjugiertes Extremalprinzip existieren, und dieses wollen wir nun herleiten am Beispiel eines auf Druck und Biegung beanspruchten geraden Stabes. Wir setzen dabei wieder das Hookesche Gesetz voraus, als den praktisch wichtigsten Fall.

Die Formänderungsarbeit, ausgedrückt durch die Verzerrungen, lautet:

$$A_i = \int \left( \frac{D}{2} \varepsilon^2 + \frac{B}{2} \kappa^2 \right) dx \quad (5)$$

( $D$  = Dehnsteifigkeit,  $B$  = Biegesteifigkeit,  $\varepsilon$  = Dehnung,  $\kappa$  = Krümmung), und in der Theorie 1. Ordnung ist

$$\varepsilon = u', \quad \kappa = v''$$

( $u$  = Längsverschiebung,  $v$  = Querschiebung, der Apostroph bedeutet zunächst Differentiation nach  $x$ ). Dagegen ist in der Theorie 2. Ordnung genauer anzusetzen<sup>7</sup>

$$\varepsilon = u' + v'^2/2, \quad \kappa = v''$$

und somit ist

$$-II = A_i - \bar{C}_a = \int \left( \frac{D}{2} (u' + v'^2/2)^2 + \frac{B}{2} v''^2 - n u - q v \right) dx \rightarrow \text{Min.} \quad (6)$$

( $n$  = Lauflast in der Längsrichtung,  $q$  = Lauflast in der Querrichtung).

Nun deuten wir weiterhin die Apostrophe nicht mehr als Differentiationssymbole, sondern als Unterscheidungszeichen. Da jetzt nicht mehr notwendig  $du/dx = u' = 0$

<sup>7</sup> Marguerre: Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode. Z. angew. Math. Mech. 18, 57—73 (1938).



ist, muß diese Beziehung als „Nebenbedingung“, mit einem Lagrange-Faktor  $N(x)$  multipliziert, dem Integranden hinzugefügt werden, und analog für die anderen beiden Beziehungen. Das Variationsprinzip lautet dann:

$$\int \left[ \frac{D}{2} (u' + v'^2/2)^2 + \frac{B}{2} v''^2 + N \left( \frac{du}{dx} - u' \right) + Q \left( \frac{dv}{dx} - v' \right) - M \left( \frac{dv'}{dx} - v'' \right) - n u - q v \right] dx \rightarrow \text{stationär.} \quad (7)$$

Für das Problem mit Nebenbedingungen kann nicht mehr gefordert werden, daß das Funktional ein Extrem besitzt, sondern nur, daß ein stationärer Wert auftritt.

Die Eulerschen Gleichungen für die Funktionen  $u'$  und  $v''$  ergeben

$$D(u' + v'^2/2) - N = 0 \quad \text{und} \quad B v'' + M = 0. \quad (8a, b)$$

Die Lagrange-Faktoren  $N$  und  $M$  sind also identisch mit den ebenso bezeichneten Schnittkräften, der Normalkraft  $N$  und dem Biegemoment  $M$ .

Ferner ergibt die Eulersche Gleichung für  $v'$ :

$$D(u' + v'^2/2) v' - Q + \frac{dM}{dx} = 0, \quad \text{also} \quad Q = \frac{dM}{dx} + N v'. \quad (8c)$$

Der Differentialquotient  $dM/dx$  ist bekanntlich die Querkraft, die senkrecht zur Achse des (verformten) Stabes wirkt. Kommt dazu noch die Komponente  $N v'$ , so erhält man die Querkraft senkrecht zur Achse des unverformten Stabes, und dieser Unterschied ist in der Theorie 2. Ordnung wesentlich. Aus (8c) und (8a) ergibt sich

$$v' = \left( Q - \frac{dM}{dx} \right) / N \quad \text{und} \quad u' = \frac{N}{D} - \frac{v'^2}{2} = \frac{N}{D} - \left( Q - \frac{dM}{dx} \right)^2 / 2 N^2, \quad (9)$$

ferner

$$v'' = -M/B.$$

Diese Ausdrücke werden in (7) eingesetzt. Weiter werden dort die differenzierten Funktionen durch Produktintegration weggeschafft: die ausintegrierten Teile verschwinden wegen der Randbedingungen, und wir erhalten damit den Extremal-ausdruck:

$$- \int \left[ \frac{N^2}{2D} + \frac{M^2}{2B} + \left( Q - \frac{dM}{dx} \right)^2 / 2N + u \left( \frac{dN}{dx} + n \right) + v \left( \frac{dQ}{dx} + q \right) \right] dx \rightarrow \text{stat.} \quad (10)$$

Um auch die Funktionen  $u$  und  $v$  aus diesem Ausdruck zu entfernen, schreiben wir für die Vergleichsfunktionen  $N$  und  $Q$  vor, daß sie die Klammern neben  $u$  und  $v$  zu Null machen, das heißt, daß sie die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen:

$$\frac{dN}{dx} = -n \quad \text{und} \quad \frac{dQ}{dx} = -q. \quad (11)$$

Die letzte willkürliche Funktion,  $M$ , eliminieren wir durch Erfüllung der Eulerschen Gleichung nach  $M$ :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{Q - \frac{dM}{dx}}{N} \right) + \frac{M}{B} = 0. \quad (12a)$$

Für den praktisch häufigsten Fall  $n = 0$  ergibt sich  $N = \text{konst.}$  und damit

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{N}{B} M = -q. \quad (12b)$$

Durch die Gleichgewichtsbedingungen sind die Schnittkräfte festgelegt, unbekannt sind nur mehr die Integrationskonstanten, das heißt die „statisch Überzähligen“.

Die innere Ergänzungsarbeit für ebene Stabwerke und gerade Stäbe, bei Vernachlässigung der Schubverformung und Voraussetzung des Hookeschen Gesetzes, beträgt also in der Theorie 2. Ordnung nach (10):



$$B_i = \int \left[ \frac{N^2}{2D} + \frac{M^2}{2B} + \frac{1}{2N} \left( Q - \frac{dM}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (13)$$

In der Theorie 1. Ordnung ist  $dM/dx = Q$ , damit ergibt sich die bekannte Formel. Das neu hinzugekommene Glied wird verständlich, wenn man es in der Form  $(N v'^2/2) dx$  anschreibt: durch die Schrägstellung des Stabelementes entsteht eine zur ursprünglichen Stabachse senkrechte Kraftkomponente  $N v'$ , die zusammen mit der Verschiebung  $v' dx$  die (Ergänzungs-) Arbeit  $\frac{1}{2} (N v') (v' dx)$  leistet.

Entsprechend der Änderung im Ausdruck für  $B_i$  tritt auch in  $C_i$  ein Glied  $\bar{N} v'^2/2$  hinzu:

$$C_i = \int \left[ \frac{N \bar{N}}{D} + \frac{M \bar{M}}{B} + \frac{1}{2} \frac{\bar{N}}{N^2} \left( Q - \frac{dM}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (14)$$

Das Hilfskraftsystem  $\bar{N}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{q}$  muß dabei die Gleichgewichtsbedingungen (11) und (12) erfüllen, und zwar an dem durch die ursprünglichen Kräfte verformten Stab. Wegen  $\bar{n} = 0$  und  $\bar{q} = 0$  wird  $\bar{N} = \text{konst.}$  und  $\bar{Q} = \text{konst.}$  und ferner nach (8c):

$$\frac{d\bar{M}}{dx} = \bar{Q} - \bar{N} v', \quad \text{also} \quad \frac{d\bar{M}}{dx} = \bar{Q} - \frac{\bar{N}}{N} \left( Q - \frac{dM}{dx} \right). \quad (15)$$

### Ein Anwendungsbeispiel

Ein gerader schlanker Stab (Länge  $2l$ ) mit beiderseits schwach exzentrischer Lagerung (Hebel  $a$ ) auf unverschieblichen Lagern wird erwärmt; gesucht ist die Auflagerreaktion  $H$ .

Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben:

$$(11): N = -H, \quad Q = 0, \quad (12): M'' + \frac{H}{B} M = 0.$$

Für  $x = \pm l$  ist  $M = -H a$ , daher

$$M = -H a \frac{\cos \alpha x}{\cos \alpha l}, \quad \alpha^2 = H/B.$$

Für unendlich hohe Dehnsteifigkeit  $D$  ergibt (13):

$$B_i = 2 \int_0^l \left( \frac{H^2 a^2}{2B} \frac{\cos^2 \alpha x}{\cos^2 \alpha l} - \frac{H a^2}{2} \alpha^2 \frac{\sin^2 \alpha x}{\sin^2 \alpha l} \right) dx = H a^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha l.$$

Die Wärmedehnung muß behoben werden durch Zwangsverzerrungen von der Größe  $-\varepsilon_t = -\omega t$ . Ihre Endwertarbeit beträgt

$$\bar{C}_a = \int_{-l}^{+l} N (-\varepsilon_t) dx = +H \cdot 2l \omega t.$$

Damit wird

$$B_i - C_a = H (a^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha l - 2l \omega t).$$

Dieser Ausdruck ist zum Minimum zu machen durch entsprechende Wahl von  $H$  oder, was rechnerisch einfacher ist, durch entsprechende Wahl von  $\alpha$ . Man erhält die Bestimmungsgleichung für  $\alpha$ :

$$a^2 \alpha^2 \left( 3 \operatorname{tg} \alpha l + \frac{\alpha l}{\cos^2 \alpha l} \right) - 4 \alpha l \omega t = 0.$$

Weiter soll die Längsverschiebung  $u$  des einen Endes der Stabachse berechnet werden mit Hilfe der Arbeitsgleichung. Wir bringen dort die Hilfskraft an,  $\bar{P} = 1$  in der Achsenrichtung. Dann ist  $C_a = \bar{P} u = u$ . Die Aufteilung auf die Auflagerreaktionen kann im statisch unbestimmten System beliebig erfolgen; wird die Hilfs-



kraft etwa am daneben befindlichen Lager aufgenommen, erfordert das Momentengleichgewicht noch zwei einander entgegengesetzte Querkräfte  $\bar{V} = a/2 l$ . Die Schnitkräfte betragen

$$\bar{N} = 0, \quad \bar{Q} = -\bar{V} = -a/2 l,$$

und nach (15):

$$\bar{M} = -\bar{V}(l + x) = -\frac{a}{2}(1 + x/l).$$

Die Verschiebung beträgt

$$u = C_a = C_i = \int \frac{M \bar{M}}{B} dx = \frac{a^3 \alpha^2}{2 \cos \alpha l} \int_{-l}^{+l} \cos \alpha l \left(1 + \frac{x}{l}\right) dx = a^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha l.$$

Sie ist geringer als die Wärmeausdehnung der Stabachse, weil wegen der Krümmung des Stabes die Sehne kürzer ist als der Bogen.

(Eingegangen am 10. März 1956)

## Über die Ablösung der Grenzschicht beim Verdichtungsstoß

Von R. Bruniak, Wien

Mit 1 Textabbildung

**Zusammenfassung.** L. Prandtls Abschätzung bei verzögerter Strömung wird beim Verdichtungsstoß angewendet. Auf Grund gewisser Vereinfachungen und der Annahme, daß sich Pohlhausen-Profile ausbilden, wird eine zweite Abschätzung gemacht.

Die Berechnungen auf dem Gebiet der kompressiblen Grenzschichten und der Stoßvorgänge im Überschallgebiet sind äußerst schwierig, weil es wegen der Kompliziertheit der Erscheinungen nicht möglich ist, entsprechend einfache theoretische Ansätze zu finden. Experimentelle Untersuchungen haben schon einen gewissen Überblick über diese Erscheinungen, ganz besonders dort, wo es sich um gleichzeitige Beobachtung von Stoßvorgängen und Grenzschicht handelt, gebracht. Es gibt auch viele ausgezeichnete Arbeiten, die sich mit den Lösungen der Grenzschichtgleichungen für kompressible Flüssigkeiten beschäftigen.

Im folgenden soll versucht werden, unter der Annahme von Vereinfachungen an die Frage, ob nach einem Stoß Ablösung der Grenzschicht erfolgt oder nicht, heranzutreten. Da die Vorgänge in der Reibungsschicht im Bereich des Verdichtungsstoßes für eine theoretische Berechnung viel zu kompliziert sind, so soll zunächst die Annahme gemacht werden, daß sich die Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht der kompressiblen Flüssigkeiten genau so darstellen lassen wie im inkompressiblen Gebiet. Die Berechnung der laminaren Grenzschicht wird hier meist nach dem Näherungsverfahren von Th. v. Kármán und K. Pohlhausen durchgeführt. Die moderne Form dieses Verfahrens wurde von H. Holstein und T. Bohlen<sup>1</sup> ausgearbeitet. Die Grundgedanken dieser Berechnungsmethode sollen kurz nach H. Schlichting<sup>2</sup> skizziert werden.

Wenn  $U$  die Geschwindigkeit am Rande der Grenzschicht (Potentialströmung) ist, so wird für  $u$ , die Geschwindigkeit in der Grenzschicht, der Ansatz gemacht

$$\frac{u}{U} = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4,$$

<sup>1</sup> H. Holstein und T. Bohlen: Ein einfaches Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Näherungsansatz von K. Pohlhausen genügen. Lilienthal-Bericht 1940.

<sup>2</sup> H. Schlichting: Grenzschichttheorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe.



wobei  $\eta = \frac{y}{\delta}$  und  $\delta(x)$  die Grenzschichtdicke ist. Bei Benützung der Grenzschichtgleichungen wird dann durch die Randbedingungen der Ansatz auf die Form

$$\frac{u}{U} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{\lambda}{6}(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4)$$

gebracht und es ist  $\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx}$  und  $\nu$  die kinematische Zähigkeit. Für das Geschwindigkeitsprofil am Ablösungspunkt ist  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$  und damit  $\lambda = -12$ . Nunmehr berechnet man die Verdrängungsdicke  $\delta^*$  und die Impulsdicke  $\vartheta$  in Abhängigkeit von  $\delta$  und  $\lambda$  und geht damit in die etwas umgeformte Impulsgleichung von Th. v. Kármán

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \delta^* \varrho U \frac{dU}{dx} + \frac{d}{dx} (\varrho U^2 \vartheta)$$

hinein. Nach Einführung eines zweiten Parameters  $\kappa = \frac{\vartheta^2}{\nu} \frac{dU}{dx}$  gelingt es, die Impulsgleichung auf die Form  $\frac{dZ}{dx} = \frac{F(\kappa)}{U}$  zu bringen, wobei  $Z = \frac{\vartheta^2}{\nu}$  und  $F(\kappa)$  eine angegebene Funktion von  $\kappa$  bzw.  $\lambda$  ist.

In Verbindung mit diesen Überlegungen hat nun L. Prandtl<sup>3</sup> die Frage beantwortet, welcher Druckanstieg in einer laminaren, verzögerten Strömung gerade noch möglich ist, damit keine Ablösung auftritt. Diese Abschätzung wird in folgender Weise gemacht. Es werde angenommen, daß sich die Grenzschicht bis nahe an den Ablösungspunkt entwickelt hat, und das  $\lambda$  für dieses Geschwindigkeitsprofil sei mit  $\lambda = -10$  gewählt. Von dieser Stelle an soll sich das Profil nicht mehr ändern und somit  $\lambda$  konstant bleiben. Aus dem oben angegebenen v. Kármán-Pohlhausen-Verfahren findet man dann als Bedingung dafür, daß keine Ablösung eintritt,  $\frac{U U''}{U'^2} > 11$ .

In einer früheren Arbeit<sup>4</sup> wurde der Geschwindigkeitsverlauf beim Vorgang eines Verdichtungsstoßes untersucht, wobei zwar innere Reibung, aber keine Wärmeleitfähigkeit angenommen wurde. Ist  $u_1$  die Überschallgeschwindigkeit des strömenden Gases vor dem geraden Stoß,  $u$  die jeweilige Geschwindigkeit im Stoßvorgang und  $y = \frac{u}{u_1}$ , so befriedigt  $y$  die Gleichung

$$[1 - y]^{2m} [1 - m y]^{-2} = e^{\alpha(m-1)x}, \quad (1)$$

wobei  $m = \frac{u_1}{u_2}$  und  $u_2$  die Unterschallgeschwindigkeit nach dem Stoß,  $\alpha$  eine Konstante und  $x$  die Lauflänge ist. Bei  $x = -\infty$  ist  $y = 1$ , also  $u = u_1$ , aber bei einem  $x$ , das dem Betrage nach bereits sehr klein ist, ist  $y$  noch immer fast 1. Für  $m = 2.7$  und  $\alpha = 10.8 \cdot 10^6$ , ist für  $y = 1 - 10^{-8}$  nach obiger Gleichung  $x = -5.48 \cdot 10^{-6}$  (in Metern). Der eigentliche Stoßvorgang erfolgt dann innerhalb einer gewissen sehr kleinen Strecke, die nach dieser Methode die Dicke des Verdichtungsstoßes darstellt. Strömt ein Gas mit Überschallgeschwindigkeit längs einer Wand, so bildet sich eine Grenzschicht aus und diese wird auch beim Auftreten eines Stoßvorganges in die „Dicke“ des Stoßes hineinreichen. Wenn man innerhalb der „Dicke“ den Geschwindigkeitsverlauf nach obiger Gleichung annimmt, so kann man die Abschätzung L. Prandtls anzuwenden versuchen. Aus Gl. (1) findet man

$$y' = \frac{\alpha(1-y)(1-my)}{2my}$$

<sup>3</sup> L. Prandtl: The mechanics of viscous fluids. In W. F. Durand, Aerodynamic Theory III, S. 112, Springer-Verlag (1935).

<sup>4</sup> R. Bruniak: Zur Struktur des Verdichtungsstoßes. Österr. Ing.-Arch. VII, H. 2, 1953, Springer-Verlag, Wien.



(der Strich bedeutet die Ableitung nach  $x$ ) und

$$y'' = \alpha y' \frac{m y^2 - 1}{2 m y^2}.$$

Da aber  $y' = \frac{u'}{u_1}$  und  $y'' = \frac{u''}{u_1}$ , so ist

$$\frac{U U''}{U'^2} = \frac{y y''}{y'^2} = \frac{m y^2 - 1}{(1 - y)(1 - m y)} > 11$$

und daraus folgt:  $11 y + 11 m y - 10 m y^2 > 12$ . Beim Stoß geht die Geschwindigkeit in  $u_2$  über und, da  $m = \frac{u_1}{u_2} = M_1^{*2}$  ist, so ist dann  $y = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{m} = \frac{1}{M_1^{*2}}$ . Damit ergibt sich für das Ende des Stoßvorganges

$$\frac{11}{m} + 11 - \frac{10}{m} > 12,$$

$$11 + \frac{1}{m} > 12,$$

eine Ungleichung, die für  $m > 1$  nicht gilt. Das heißt aber, daß das Profil  $\lambda = -10$  nicht erhalten bleibt. Es ist somit Ablösung zu erwarten.

Wie bereits oben angenommen, seien also die Geschwindigkeitsprofile in dimensionsloser Schreibweise gegeben durch

$$\frac{u}{U} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{\lambda}{6}(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4),$$

wobei  $0 \leq \eta \leq 1$  gilt und  $\lambda$  je nach dem ausgebildeten Profil verschiedene Werte besitzt. Für  $\lambda > 12$  erhält man  $\frac{u}{U} > 1$ , das heißt, gewisse

Geschwindigkeiten in der Grenzschicht sind größer als die Geschwindigkeit am Rande derselben. Für stationäre Grenzschichten trifft dies nicht zu. Wenn man jedoch bedenkt, daß sich beim Verdichtungsstoß ein Profil ausbildet<sup>5</sup>, das insofern von den Geschwindigkeitsprofilen in der Grenzschicht abweicht, als die Geschwindigkeiten von Null bis zur kritischen ansteigen und dann wieder bis zur Unterschallgeschwindigkeit, die beim geraden Stoß eintritt, abfallen, so kann man versuchen, für so ein Profil eines von Pohlhausen mit einem  $\lambda$ -Wert größer als 12 anzusetzen. Man muß sich vorstellen, daß das Profil bis zum Stoßbeginn einen  $\lambda$ -Wert zwischen  $-12$  und  $+12$  hatte und dann plötzlich innerhalb der Stoßbreite einen  $\lambda$ -Wert größer als 12 annimmt. In Abb. 1 sind verschiedene Profile dargestellt.

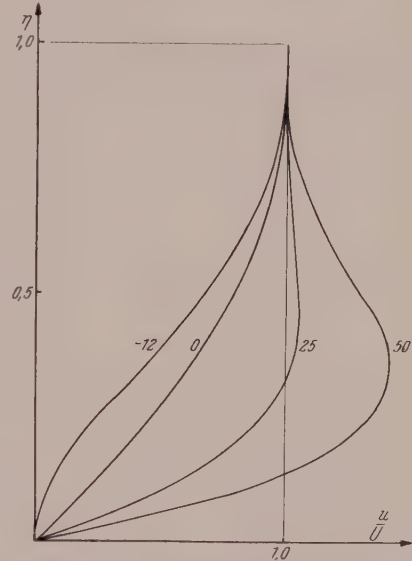


Abb. 1. Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht

Weil nach dem Stoß die Geschwindigkeit am Rande der Grenzschicht  $u_2$  ist, so hat man für die kritische Geschwindigkeit z. B., wenn  $\lambda = 50$ ,  $\frac{c^*}{u_2} = 1.43$  (aus dem Diagramm). Da  $u_1 u_2 = c^{*2}$ , so ist  $\frac{c^*}{u_2} = \frac{u_1}{c^*} = M_1^*$ . Also  $M_1^* = 1.43$  und  $M_1 = 1.61$ . Man denke sich nun die Grenzschicht bis zu einem bestimmten Punkt der Lauflänge  $x$  ausgebildet und der Wert von  $\lambda$  sei  $\lambda_1$ . An dieser Stelle  $x_1$  entstehe dann ein gerader Verdichtungsstoß, der bis  $x_2$  reiche. Bei  $x_2$  sei  $\lambda = \lambda_2$ . Ferner gelte  $\lambda_1 < 12$  und  $\lambda_2 > 12$ . Ganz knapp hinter  $x_2$  liege der Punkt  $x_3$  mit  $\lambda_3$ . Auf die Quer-

<sup>5</sup> R. Bruniak: Über die Rückströmung in der Grenzschicht beim Verdichtungsstoß. Österr. Ing. Arch. 8, H. 2/3 (1954).

schnitte bei  $x_2$  und  $x_3$  kann man nun den Impulssatz mit gewissen Vernachlässigungen anwenden. Es gilt dann

$$\int_0^{\delta} (\varrho u) u dy - \int_0^{\delta} (\bar{\varrho} \bar{u}) \bar{u} dy = p_2 \delta - \int_0^{\delta} p dy. \quad (2)$$

In diesem Ansatz bedeuten  $u$  die Geschwindigkeiten bei 2 und  $\bar{u}$  die bei 3. Die Grenzschichtdicke  $\delta$  ist wegen der sehr kleinen Entfernung von  $x_2$  und  $x_3$  gleich angenommen und im ganzen Querschnitt bei 3 herrsche der Druck  $p_2$ , der nach dem Stoß entsteht. Nimmt man im Querschnitt 2 den Druck bis zur kritischen Geschwindigkeit mit  $p_1$ , demselben der vor dem Stoß gelten soll, an, so kann man

$$\int_0^{\delta} p dy = \int_0^{y'} p_1 dy + \int_{y'}^{\delta} p dy = p_1 y' + \int_{y'}^{\delta} p dy$$

schreiben.  $p$  ist nun der jeweilige Druck, der beim Stoß entsteht, und es ist<sup>6</sup>

$$p = -c(u_2 - u_1) + p_1$$

mit  $c$  als konstanter Stromdichte. Damit bekommt man

$$\int_{y'}^{\delta} p dy = - \int_{y'}^{\delta} [c(u_2 - u_1) - p_1] dy.$$

Aus Gl. (2) folgt somit

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} (\varrho u) u dy - \int_0^{\delta} (\bar{\varrho} \bar{u}) \bar{u} dy &= p_2 \delta - p_1 y' + \int_{y'}^{\delta} [c(u_2 - u_1) - p_1] dy, \\ \int_0^{\delta} (\varrho u) u dy - \int_0^{\delta} (\bar{\varrho} \bar{u}) \bar{u} dy &= (p_2 - p_1) \delta + \int_{y'}^{\delta} c(u_2 - u_1) dy. \end{aligned}$$

Da  $u_2$  kleiner als  $u_1$  ist, so gibt das Integral den Impulsverlust, der beim Stoß entsteht, denn unter  $u_1$  und  $u_2$  sind die jeweiligen Geschwindigkeiten zwischen der kritischen und der Geschwindigkeit am Rande der Grenzschicht zu verstehen. Wenn man diesen Verlust zum ersten Integral auf der linken Seite, das den Impuls beim  $\lambda_2$ -Profil darstellt, hinzugibt, so erhält man den Impuls beim  $\lambda_1$ -Profil.

Es bleibt somit

$$\int_0^{\delta} (\varrho u) u dy - \int_0^{\delta} (\bar{\varrho} \bar{u}) \bar{u} dy = (p_2 - p_1) \delta,$$

wobei das erste Integral den Impuls bei 1, das zweite den bei 3 darstellt. Weil  $\varrho u = c$ , die Stromdichte, als konstant angenommen werden soll, so folgt mit  $\eta = \frac{y}{\delta}$

$$\int_0^1 c u \delta d\eta - \int_0^1 c \bar{u} \delta d\eta = (p_2 - p_1) \delta.$$

Oder

$$\int_0^1 u d\eta - \int_0^1 \bar{u} d\eta = \frac{p_2 - p_1}{c}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} u &= \left( 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{\lambda_1}{6} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) \right) u_1, \\ \bar{u} &= \left( 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{\lambda_3}{6} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) \right) u_2; \end{aligned}$$

dies eingesetzt, ergibt

<sup>6</sup> Siehe <sup>4</sup>.



$$0.7 u_1 + \frac{\lambda_1}{120} u_1 - 0.7 u_2 - \frac{\lambda_3}{120} u_2 = \frac{p_2 - p_1}{c} = -u_2 + u_1,$$

$$\lambda_1 u_1 - \lambda_3 u_2 = 0.3 (u_1 - u_2) \cdot 120,$$

$$\lambda_1 - \lambda_3 \frac{u_2}{u_1} = 36 \left( 1 - \frac{u_2}{u_1} \right).$$

Nun ist aber

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{c^{*2}}{u_1^2} = \frac{1}{M_1^{*2}},$$

daher

$$\lambda_1 - \lambda_3 \frac{1}{M_1^{*2}} = 36 \left( 1 - \frac{1}{M_1^{*2}} \right),$$

$$\lambda_1 = 36 - \frac{1}{M_1^{*2}} (36 - \lambda_3).$$

Soll nun die Grenzschicht bei 3 ablösen, so muß bekanntlich wegen  $\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = 0$  dann  $\lambda = -12$  sein. Angenommen, es erfolge Ablösung, so ergibt die letzte Gleichung

$$\lambda_1 = 36 - \frac{48}{M_1^{*2}}.$$

Die Werte von  $M_1^*$  gehen von 1 bis 2.437.

Es gilt somit

$$1 \geq \frac{1}{M_1^{*2}} \geq 0.17$$

und

$$-12 \leq \lambda_1 \leq 27.$$

Setzt man im Querschnitt 1 den größten  $\lambda$ -Wert, den man für stationäre Grenzschichten hat, also  $+12$  voraus, so kann man  $M_1^*$  ausrechnen und findet  $M_1^* = \sqrt{2}$  und daher  $M_1 = \sqrt{2 \cdot 5}$ . Für alle Werte  $M_1^*$  größer als  $\sqrt{2}$  ergeben sich  $\lambda_1$ -Werte größer als  $+12$ . Für kritische Mach-Zahlen, die größer als  $\sqrt{2}$  sind, wird also auf jeden Fall Ablösung eintreten, denn die  $\lambda_1$ -Werte sind kleiner als der aus obiger Gleichung gefundene Wert. Hat man  $M_1^* < \sqrt{2}$ , so ist  $\lambda_1 < 12$ .  $M_1 = 1.225$ , also  $M_1^* = 1.177$  gibt  $\lambda_1 \approx 1$ . Ist nun der  $\lambda$ -Wert des Geschwindigkeitsprofils in dem Punkt, in dem der Verdichtungsstoß beginnt, größer als 1, so würde nach obigem in diesem Fall der Stoß nicht zur Ablösung führen.

(Eingegangen am 31. Januar 1956.)

## Wärmespannungen in einem Prandtl-Reußschen Körper

Von Fritz Chmelka, Wien

**Zusammenfassung.** Die Prandtl-Reußschen Gleichungen des ideal plastischen Körpers werden erweitert für den Fall, daß infolge eines Temperaturfeldes Wärmespannungen auftreten. An Hand eines einfachen Beispiels wird die Anwendung der Theorie vorgeführt.

### I. Elastischer Bereich

Den folgenden Betrachtungen liegt ein homogener, isotroper Körper mit einem von der Temperatur unabhängigen Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  zugrunde. Der Körper soll sich bis zu einer gewissen Grenze elastisch, dann jedoch ideal plastisch verhalten. Die Temperatur  $T$  des Körpers kann von Ort zu Ort verschieden sein. Sie werde von irgendeinem Ausgangspunkt aus gezählt, wo sich der Körper im „Normalzustand“, also etwa im spannungslosen Zustand befinden möge. Die Temperatur werde sehr langsam auf die betrachtete Höhe  $T$  gebracht, von einer

allfälligen raschen Zeitabhängigkeit der Temperatur (nicht stationäre Zustände) soll hier nicht die Rede sein. Der im folgenden betrachtete Spannungszustand des Körpers  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$  kann entweder durch die Temperatur  $T$  allein hervorgerufen worden sein, in diesem Fall spricht man von Wärmespannungen. Die folgenden Betrachtungen gelten aber auch dann, wenn dieser Spannungszustand nicht allein infolge von  $T$ , sondern durch eine gleichzeitig wirkende äußere Belastung entstanden ist.

Betrachten wir zunächst den elastischen Bereich des Körpers, so besteht zwischen den Spannungskomponenten, der Temperatur und den Verzerrungskomponenten  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$  der folgende Zusammenhang<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left( \sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu} s \right) + \alpha T, & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left( \sigma_y - \frac{3\nu}{1+\nu} s \right) + \alpha T, & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left( \sigma_z - \frac{3\nu}{1+\nu} s \right) + \alpha T, & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}.\end{aligned}\quad (1)$$

Darin bedeutet  $G$  den Schubmodul,  $\nu$  die Poissonsche Konstante und

$$s = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2)$$

die mittlere Normalspannung. Bezeichnen wir mit  $u_x, u_y, u_z$  die Verschiebungen der Punkte des Körpers, so hängen diese mit den Verzerrungen in der bekannten Weise zusammen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \\ \text{usw.} & & \text{usw.} & \end{aligned}\quad (3)$$

Die Gl. (1) und (3), noch vermehrt durch die drei Gleichgewichtsbedingungen, stellen dann insgesamt ebenso viele Gleichungen dar, wie die Zahl der unbekannten Spannungs-, Verzerrungs- und Verschiebungskomponenten beträgt.

Im Hinblick auf die folgenden Überlegungen wollen wir die thermo-elastischen Grundgleichungen (1) in eine etwas andere Form bringen. Führen wir die mittlere Dehnung

$$e = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (4)$$

ein, so erhalten wir durch Addition der Gl. (1)

$$e = \frac{s}{3K} + \alpha T, \quad (5)$$

wo

$$K = \frac{2G}{3} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \quad (6)$$

den Kompressionsmodul bedeutet. Für die spezifische Volumensänderung gilt dann

$$\frac{\Delta v}{v} = 3e = \frac{s}{K} + 3\alpha T. \quad (7)$$

Führen wir nun den Spannungsdeviator ein, mit den Komponenten

$$\begin{aligned}s_x &= \sigma_x - s, & \tau_{yz} & \\ \text{usw.} & & \text{usw.} & \end{aligned}\quad (8)$$

<sup>1</sup> Siehe etwa E. Melan und H. Parkus: Wärmespannungen, S. 5. Wien: Springer-Verlag. 1953. Es sei darauf hingewiesen, daß in diesem Buch, im Gegensatz zu den obigen Definitionen, unter  $s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  und unter  $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  verstanden ist. Ferner schreiben wir statt  $\varepsilon_{xy}$  hier  $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$  usw.



und den Verzerrungsdeviator

$$e_x = \varepsilon_x - e, \quad \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \quad (9)$$

usw.                      usw.

so erhalten wir aus den Gl. (1)

$$\begin{aligned} s_x &= 2G e_x, & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \\ s_y &= 2G e_y, & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}, \\ s_z &= 2G e_z, & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (10)$$

Zwischen den Komponenten des Spannungs- und des Verzerrungsdeviators besteht somit der gleiche Zusammenhang wie in dem Fall, daß kein Temperaturfeld vorhanden ist. Die Gl. (10) sind jedoch nicht voneinander unabhängig (denn es ist stets  $s_x + s_y + s_z = 0$ ) und sie müssen noch durch die Gl. (5) ergänzt werden, die dann auch die Abhängigkeit von der Temperatur zum Ausdruck bringt.

## II. Plastischer Bereich

Wir nehmen an, daß sich das Material plastisch verhält, sobald die Fließbedingung erfüllt ist. Man wird nicht fehlgehen, wenn man diese auch im Falle der Wärmespannungen als Funktion der Spannungen allein (unabhängig von den Verzerrungen) ansetzt. Im allgemeinen wird man die Misessche Fließbedingung benutzen, die besagt, daß plastisches Fließen dann zu erwarten ist, wenn die zweite Invariante des Spannungsdeviators einen bestimmten Wert erreicht und diesen während der folgenden Zeit beibehält:

$$J_2 = k^2 \quad \text{und} \quad \dot{J}_2 = 0. \quad (11)$$

(Hier wie im folgenden möge der Punkt die partielle Ableitung nach der Zeit bedeuten.) Ausführlich geschrieben, ist

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2, \quad (12)$$

und  $k$  hat die Bedeutung der Schubfließgrenze, das ist jene Schubspannung, bei der unter dem Spannungszustand „reiner Schub“ Fließen einsetzt.  $k$  hängt mit der Zug- bzw. Druckfließgrenze  $\sigma_F$  wie folgt zusammen:

$$\sigma_F = \pm k \sqrt{3}. \quad (13)$$

Ist  $J_2 < k^2$ , so befinden wir uns im elastischen Bereich. Ist zwar  $J_2 = k^2$ , aber  $\dot{J}_2 < 0$ , so spricht man von einer Entlastung aus dem plastischen Bereich, von der angenommen wird, daß sie ebenfalls rein elastisch erfolgt.

$k$  ist normalerweise eine Konstante. Im Falle der Berechnung von Wärmespannungen wird man allerdings beachten müssen, daß, wenn sich die Betrachtungen über größere Temperaturbereiche erstrecken, die Höhe der Schubfließgrenze von der Temperatur und, wenn sich diese mit der Zeit ändert, auch von der Zeit abhängen wird, worauf wir hier jedoch nicht näher eingehen.

Wir wollen annehmen, daß bei dem von uns betrachteten Körper, wenn er bloß einer Belastung ausgesetzt ist (wenn also kein Temperaturfeld herrscht), für den Zusammenhang zwischen Spannungen und Formänderungen im plastischen Bereich die Gleichungen von Prandtl und Reuß gelten sollen, welche lauten<sup>2</sup>:

$$2G \dot{e}_x = \dot{s}_x + \lambda s_x, \quad G \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\tau}_{yz} + \lambda \tau_{yz}, \quad (14)$$

usw.                      usw.

<sup>2</sup> Siehe etwa W. Prager und P. G. Hodge: Theorie ideal plastischer Körper (deutsch von F. Chmelka), S. 30, Wien: Springer-Verlag, 1954; oder F. Chmelka: Überblick über die Plastizitätstheorie und ihre neuere Entwicklung. Österr. Bauzeitschrift 10, 145—160 (1955).

Dies besagt, daß sich z. B. die Änderungsgeschwindigkeit der Deviator Komponente  $e_x$ , das ist  $\dot{e}_x$ , zusammensetzt aus einem aus dem Hookeschen Gesetz [Gl. (10)] folgenden elastischen Anteil

$$\dot{e}_x' = \frac{1}{2G} \dot{s}_x \quad (15a)$$

und einem plastischen Anteil  $\dot{e}_x''$ , welcher proportional der an der betreffenden Stelle herrschenden Spannungsdeviator Komponente  $s_x$  gesetzt wird. Da man annimmt, daß die Spannungen keine bleibende Volumsänderung hervorrufen, ist der plastische Anteil der mittleren Dehnung, den wir mit  $e''$  bezeichnen wollen, gleich Null, und es gilt für den plastischen Anteil der Dehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{e}_x'' = \dot{e}_x''$  usw. Wir setzen also

$$\dot{e}_x'' = \dot{\varepsilon}_x'' = \frac{\lambda}{2G} s_x. \quad (15b)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  hängt von den Koordinaten wie auch von der Zeit ab und stellt eine neue Unbekannte dar, die jedoch mittels der Fließbedingung (11) eliminiert werden kann. Wiederum sind von den sechs Gl. (14) nur fünf voneinander unabhängig; sie werden ergänzt durch die Beziehung

$$\dot{e} = \frac{\dot{s}}{3K}, \quad (16)$$

die aus Gl. (5) folgt, nachdem wir dort  $T = 0$  gesetzt haben, da wir ja im Augenblick kein Temperaturfeld betrachten. Da nämlich  $\dot{e}'' = 0$  ist, ist  $\dot{e} = \dot{e}'$ , das heißt, gleich dem nach dem Hookeschen Gesetz zu berechnenden elastischen Anteil von  $\dot{e}$ .

Ist nun ein Temperaturfeld vorhanden, so wollen wir die Annahme beibehalten, daß sich der Körper gegenüber den Spannungen im plastischen Bereich als inkompressibel erweist, hingegen soll er den gleichen Wärmeausdehnungskoeffizienten besitzen wie im elastischen Bereich<sup>3</sup>.

Im folgenden bedeutet ein Buchstabe ohne Strich den Gesamtwert der betreffenden Größe; die von den Spannungen herrührenden Anteile sollen durch den Index  $\sigma$  gekennzeichnet werden. Es gilt dann für die Gesamtdehnung in der  $x$ -Richtung, die sich aus einem elastischen und einem plastischen Spannungsanteil und einem Temperaturanteil zusammensetzt:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x\sigma}' + \varepsilon_{x\sigma}'' + \alpha T. \quad (17)$$

Aus dieser Gleichung und den analogen Ausdrücken für  $\varepsilon_y$  und  $\varepsilon_z$  folgt dann die gesamte mittlere Dehnung zu

$$e = e_{\sigma}' + e_{\sigma}'' + \alpha T = e_{\sigma}' + \alpha T, \quad (18)$$

da ja  $e_{\sigma}'' = 0$  ist. Nun gilt für die Deviator Komponenten

$$e_{x\sigma}' = \varepsilon_{x\sigma}' - e_{\sigma}', \quad e_{x\sigma}'' = \varepsilon_{x\sigma}''. \quad (19)$$

Es ist daher der Gesamtwert der  $x$ -Komponente des Verzerrungsdeviators gegeben durch

$$e_x = \varepsilon_x - e = e_{x\sigma}' + e_{x\sigma}'', \quad (20)$$

und der Verzerrungsdeviator sieht demnach genau so aus, wie wenn kein Temperaturfeld vorhanden wäre. Das gleiche gilt natürlich auch für seine Ableitung. Es bleiben daher, auch wenn ein Temperaturfeld vorhanden ist, die Gl. (14) unverändert:

$$\begin{aligned} 2G \dot{e}_x &= \dot{s}_x + \lambda s_x, & G \dot{\gamma}_{yz} &= \dot{\tau}_{yz} + \lambda \tau_{yz}, \\ 2G \dot{e}_y &= \dot{s}_y + \lambda s_y, & G \dot{\gamma}_{zx} &= \dot{\tau}_{zx} + \lambda \tau_{zx}, \\ 2G \dot{e}_z &= \dot{s}_z + \lambda s_z, & G \dot{\gamma}_{xy} &= \dot{\tau}_{xy} + \lambda \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (21)$$

<sup>3</sup> Es wäre zu klären, ob in dieser Annahme, wenn sie in aller Strenge verstanden wird, nicht etwa ein grundsätzlicher Widerspruch liegt. Indessen zeigen z. B. auch Flüssigkeiten geringe Kompressibilität und doch merkliche Wärmeausdehnung.



Der Unterschied gegenüber früher macht sich nur in der der Gl. (16) entsprechenden Zusatzgleichung bemerkbar. Indem wir Gl. (18) nach der Zeit differenzieren und für  $\dot{e}_\sigma'$  seinen Wert gemäß Gl. (16) (die ja den elastischen Spannungsanteil von  $\dot{e}$  darstellt) einsetzen, erhalten wir

$$\dot{e} = \frac{\dot{s}}{3K} + \alpha \dot{T}. \quad (22)$$

Bezüglich des Faktors  $\lambda$  sei noch folgendes bemerkt. Führt man die Größe

$$\dot{W} = s_x \dot{e}_x + s_y \dot{e}_y + s_z \dot{e}_z + \tau_{yz} \dot{\gamma}_{yz} + \tau_{zx} \dot{\gamma}_{zx} + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} \quad (23)$$

ein, so läßt sich zeigen, daß sie die Arbeit darstellt, die pro Zeit- und Volumseinheit bei der Gestaltsänderung des Körpers (im Gegensatz zu Volumsänderungsarbeit) geleistet wird<sup>4</sup>. Setzt man in Gl. (23) für  $\dot{e}_x = \dot{e}_x' + \dot{e}_x''$ <sup>5</sup>, so sieht man, daß man  $\dot{W}$  in einen elastischen Anteil  $\dot{W}'$  und in einen plastischen Anteil  $\dot{W}''$  zerlegen kann, wobei sich mittels Gl. (10) und (12) der elastische Anteil in der Form

$$\dot{W}' = \frac{1}{2G} \dot{J}_2 \quad (24)$$

schreiben läßt, so daß also gilt:

$$\dot{W} = \frac{1}{2G} \dot{J}_2 + \dot{W}''. \quad (25)$$

Im plastischen Bereich, also bei Gültigkeit der Gl. (21), ist laut Gl. (11)  $\dot{J}_2 = 0$  und somit  $\dot{W} = \dot{W}''$ . Multipliziert man die Gl. (21) der Reihe nach mit  $s_x, s_y, s_z, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}, 2\tau_{xy}$  und addiert, so findet man nach Einsetzen des Wertes von  $\dot{W}$  und unter Beachtung der Gl. (11) die folgende Darstellung für  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{G W''}{k^2}. \quad (26)$$

$\lambda$  ist also der an der betreffenden Stelle des Körpers bei der plastischen Verformung geleisteten Gestaltsänderungsarbeit proportional. Diese Arbeit kann nicht mehr als mechanische Arbeit zurückgewonnen werden, sondern wird in irreversibler Weise zur Gänze in Wärme verwandelt. Jedes Volumenelement, in dem eine plastische Verformung auftritt, stellt demnach eine Wärmequelle dar, was unter Umständen die eingepreßte Temperaturverteilung beeinflussen kann.

Betreffend die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen wäre noch zu sagen, daß diese berechtigt ist, solange sämtliche von uns mit Punkten bezeichneten zeitlichen Änderungen entsprechend langsam vor sich gehen. Wenn insbesondere das Temperaturfeld genügend langsam aufgebaut wird, so daß jede Temperaturänderung Zeit hat, sich über den ganzen Körper auszuwirken, dann können wir das Feld in jedem Augenblick als stationär betrachten.

Rückschauend erkennen wir, daß bei der Aufstellung der Prandtl-Reußschen Gleichungen für einen temperaturbeanspruchten Körper eine Reihe von Problemen auftaucht und es mag sich vielleicht gegen diese oder jene der hier getroffenen Annahmen ein Einwand erheben. In erster Näherung jedoch dürften unsere Gleichungen gute Dienste leisten.

### III. Beispiel

Als einfaches Beispiel betrachten wir einen prismatischen Klotz aus elastisch-plastischem Material, der sich zwischen zwei starren Wänden befindet und der einer langsam ansteigenden Erwärmung und einer darauffolgenden langsamen Abkühlung

<sup>4</sup> Siehe Prager-Hodge<sup>2</sup>, S. 36.

<sup>5</sup> Wir ließen den Index  $\sigma$  wieder weg, da die Deviatorikkomponenten ohnehin keinen Temperaturanteil besitzen.

ausgesetzt ist. Die Länge des Klotzes, die gleich dem Abstand der beiden Wände sein soll, bleibt also während des ganzen folgenden Prozesses konstant bis zu dem Augenblick, wo sich der Klotz von den Wänden löst. Der Querschnitt des Klotzes sei konstant und mag etwa quadratisch gedacht werden. Zu Anfang des Prozesses ( $T = 0$ ) sei der Klotz spannungslos und passe genau zwischen die beiden Wände hinein. Mit steigender Temperatur  $T$  werden die Wände auf den Klotz, dessen Ausdehnung sie verhindern, Druckspannungen ausüben. Die Formänderungen des Klotzes werden zunächst rein elastisch sein, später werden sich plastische Verformungen hinzugesellen. Lassen wir sodann die Temperatur wieder sinken, so wird die Entlastung des Klotzes in rein elastischer Weise erfolgen.

Wir wollen dieses Beispiel mit Hilfe der von uns abgeleiteten Gleichungen behandeln, obwohl die Rechnung auch auf ganz elementarem Wege durchgeführt werden kann. Beide Wege führen zu demselben Ergebnis, was als Kontrolle dienen kann.

Wir legen die  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems in die Längsachse des Klotzes, also senkrecht zu den beiden Wänden, die  $y$ - und die  $z$ -Achse legen wir parallel zu den Quadratseiten des Querschnittes. Es tritt dann nur eine von Null verschiedene Spannungskomponente auf, nämlich  $\sigma_x$ , die wir der Kürze halber mit  $\sigma$  bezeichnen. Nach den Gl. (2) und (8) haben wir dann

$$s = \frac{1}{3} \sigma, \quad s_x = \frac{2}{3} \sigma, \quad s_y = s_z = -\frac{1}{3} \sigma. \quad (27)$$

Nach Voraussetzung ist die Längsdehnung  $\varepsilon_x = 0$  (und dasselbe gilt für sämtliche Gleitungen), ferner ist  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_q$  gleich der Querdehnung. Nach den Gl. (4) und (9) ist demnach

$$e = \frac{2}{3} \varepsilon_q, \quad e_x = -\frac{2}{3} \varepsilon_q, \quad e_y = e_z = \frac{1}{3} \varepsilon_q. \quad (28)$$

Zunächst gilt das Hookesche Gesetz; wir erhalten nach Einsetzen der Werte aus den Gl. (27) und (28) in die erste Gl. (10)

$$\sigma = -2G\varepsilon_q. \quad (29)$$

Ferner folgt aus Gl. (5) in Verbindung mit Gl. (27)

$$e = \frac{\sigma}{9K} + \alpha T. \quad (30)$$

Setzen wir darin für  $e$  seinen Wert aus Gl. (28) ein, sodann für  $\varepsilon_q$  seinen Wert aus Gl. (29) und schließlich für  $K$  den Wert aus Gl. (6), so folgt, wenn wir beachten, daß der Elastizitätsmodul  $E = 2G(1 + \nu)$  ist,

$$\sigma = -\alpha E T. \quad (31)$$

Dies eingesetzt in Gl. (29) liefert für die Querdehnung

$$\varepsilon_q = \alpha(1 + \nu) T. \quad (32)$$

Diese beiden Gleichungen für  $\sigma$  und  $\varepsilon_q$  gelten bis zum Erreichen der Fließgrenze, das ist hier die Druckfließgrenze für den einachsigen Spannungszustand  $\sigma_F = -k/\sqrt{3}$  [s. Gl. (13)]. Die Temperatur, bei der Fließen einsetzt, erhalten wir aus Gl. (31) zu

$$T_F = -\frac{\sigma_F}{\alpha E} \quad (\sigma_F < 0). \quad (33)$$

Die Größe der Querdehnung zu diesem Zeitpunkt folgt aus Gl. (32) zu

$$\varepsilon_{qF} = \alpha(1 + \nu) T_F = -\frac{\sigma_F}{E} (1 + \nu). \quad (34)$$

Für Stahl ist  $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 1.25 \cdot 10^{-5}/^\circ \text{C}$ ; setzen wir etwa für



$\sigma_F = -2400 \text{ kg/cm}^2$ , so erhalten wir für  $T_F = 91^\circ \text{C}$ . Bei solchen Temperaturen können wir wohl noch die Temperaturabhängigkeit der Materialwerte vernachlässigen.

Bei weiterer Temperatursteigerung kommen wir nun in den plastischen Bereich, wo die Gl. (21) und (22) gelten. Aus der Fließbedingung folgt, daß die Spannung  $\sigma_x$  nunmehr konstant und gleich  $\sigma_F$  bleibt. Da wir also die Spannung bereits kennen und ferner nur eine einzige unbekannte Verzerrungsgröße, nämlich  $\varepsilon_q$ , haben, können wir diese sofort aus Gl. (22) im Verein mit Gl. (28) berechnen. Da wegen  $\sigma_x = \text{konst.}$  und  $\sigma_y = \sigma_z = 0$   $\dot{s} = 0$  ist, haben wir

$$\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_q = \alpha \dot{T}. \quad (35)$$

Diese Gleichung gilt im plastischen Bereich, also für  $T > T_F$ . Ist  $T_1$  die Höchsttemperatur, auf die wir den Klotz erwärmen, dann liefert die Integration der Gl. (35) mit den Anfangswerten  $\varepsilon_{qF}$  nach Gl. (34) und  $T_F$  nach Gl. (33) für die Querdehnung  $\varepsilon_{q1}$  im Augenblick des Erreichens der höchsten Temperatur

$$\varepsilon_{q1} = \frac{3}{2} \alpha T_1 + \frac{\sigma_F}{2E} (1 - 2\nu). \quad (36)$$

Wenn wir nunmehr die Temperatur wieder senken, so erfolgt die Entlastung aus dem plastischen Gebiet in rein elastischer Weise, das heißt, die Spannungsänderungen hängen mit den Änderungen der Verzerrungsgrößen nach dem Hookeschen Gesetz zusammen. Die Gl. (10) und (5) müssen daher jetzt in differentieller Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_x &= 2G \dot{\varepsilon}_x, & \dot{\tau}_{yz} &= G \dot{\gamma}_{yz}, \\ \text{usw.} & & \text{usw.} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{s}}{3K} + \alpha \dot{T}. \quad (38)$$

Wir wollen bis zu jenem Punkt abkühlen, wo die Spannung  $\sigma$  gleich Null geworden ist und bezeichnen die zugehörige Temperatur mit  $T_2$ . Der vorher zwischen den beiden Wänden infolge der Wärmespannungen festgeklemmte Klotz wird in diesem Augenblick herausfallen.

Setzen wir in die erste Gl. (37) und in Gl. (38) die Werte für  $\dot{\sigma}_x$ ,  $\dot{\varepsilon}_x$ ,  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{s}$  aus den nach der Zeit differenzierten Gl. (27) und (28) ein, so erhalten wir schließlich

$$\dot{\sigma} = -\alpha E \dot{T}, \quad (39)$$

$$\dot{\varepsilon}_q = (1 + \nu) \alpha \dot{T}. \quad (40)$$

[Es ergeben sich natürlich die nach der Zeit differenzierten Gl. (31) und (32).] Gl. (39) ist nun zwischen den Grenzen  $\sigma_F$  und 0 für die Spannung bzw.  $T_1$  und  $T_2$  für die Temperatur zu integrieren, worauf sich die gesuchte Temperatur  $T_2$  ergibt:

$$T_2 = T_1 + \frac{\sigma_F}{\alpha E} = T_1 - T_F. \quad (41)$$

Dieses Ergebnis ist nicht überraschend, wenn man bedenkt, daß die gesamten bis zur Fließgrenze aufgebauten elastischen Verformungen wieder abgebaut werden müssen.

Hätten wir also den vorhin betrachteten Stahlklotz auf  $T_1 = 150^\circ \text{C}$  erwärmt und nachher wieder abgekühlt, so würde er bei  $T_2 = 59^\circ$  aus seiner Einklemmung herausfallen.

Integrieren wir Gl. (40) zwischen den Grenzen  $\varepsilon_{q1}$  und  $\varepsilon_{q2}$  für die Querdehnung bzw.  $T_1$  und  $T_2$  für die Temperatur, so erhalten wir für die Querdehnung bei der Temperatur  $T_2$

$$\varepsilon_{q2} = \frac{3}{2} \left( \alpha T_1 + \frac{\sigma_F}{E} \right). \quad (42)$$

Nun wollen wir die Temperatur wieder auf ihren Ausgangspunkt  $T = 0$  absenken. Der Körper ist jetzt spannungslos und zieht sich mit abnehmender Temperatur gleichmäßig zusammen. Nun nimmt auch die Dehnung in der  $x$ -Richtung ab. Bezeichnen wir sie mit  $\varepsilon$  und nennen wir  $\varepsilon_3$  ihren Endwert bei  $T = 0$ , so haben wir

$$\varepsilon_3 = -\alpha T_2 = -\left(\alpha T_1 + \frac{\sigma_F}{E}\right), \quad (43)$$

wenn wir für  $T_2$  seinen Wert aus Gl. (41) einsetzen. Für die Querdehnung in diesem Augenblick erhalten wir mittels des Wertes aus Gl. (42)

$$\varepsilon_{q3} = \varepsilon_{q2} - \alpha T_2 = \frac{1}{2} \left( \alpha T_1 + \frac{\sigma_F}{E} \right). \quad (44)$$

Wir bezeichnen mit  $\bar{T}$  die Temperaturdifferenz, um die wir die Temperatur an der Fließgrenze überschritten haben, um zur Höchsttemperatur  $T_1$  zu gelangen, also  $\bar{T} = T_1 - T_F$ . Unter Verwendung von Gl. (41) (der zufolge übrigens  $\bar{T} = T_2$  ist) lauten dann die Gl. (43) und (44) für die bleibenden Verformungen des Klotzes

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= -\alpha \bar{T}, \\ \varepsilon_{q3} &= \frac{1}{2} \alpha \bar{T}. \end{aligned} \quad (45)$$

Der Klotz ist also ein wenig breitgedrückt worden. Zur Kontrolle stellen wir fest, daß die bleibende Volumsänderung gleich Null ist:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_3 + 2\varepsilon_{q3} = 0. \quad (46)$$

Literaturhinweise betreffend Wärmespannungen im plastischen Bereich:

L. M. Kachanov: Elastisch-plastisches Gleichgewicht ungleich erwärmter dickwandiger Zylinder bei Innendruckbeanspruchung (russisch). *J. Techn. Physics*, Leningrad **10**, 1167 (1940).

B. N. Finkelstein: Bedingungen für die Bildung plastischer Verformung in Körpern einfachster Form, die von der Oberfläche her plötzlich abgekühlt werden (russisch). *J. Techn. Physics* **18**, 1026 (1948).

T. Eggert: Die Beherrschung des Höchstdruckes in Rohrleitungen durch Schrumpfung. *Maschinenbau-Technik* **1**, 177—184, 234—236, 363—369 (1952).

H. Parkus: Schweißspannungen in einer dreh-symmetrischen Scheibe. *Alfons Leon-Gedenkschrift*, S. 65—67, Wien 1952.

A. M. Freudenthal: Thermal stresses in inelastic media. Fourth Symposium on Plasticity (abstracts of papers) **19**, Brown University 1953. On inelastic thermal stresses in flight structures. *J. aero. Sci.* **21**, 772—778 (1954); darin finden sich weitere Literaturhinweise.

(Eingegangen am 22. Februar 1956)

## Stabilitätsuntersuchung von Regelungsvorgängen vermittels Laplace-Transformation

Von Gustav Doetsch, Freiburg i. B.

**Zusammenfassung.** Wenn die Laplace-Transformierte der Regelgröße gefunden ist, läßt sich mit ihrer Hilfe die Frage der Stabilität entscheiden, aber nicht (außer in den einfachsten Fällen) durch bloße Betrachtung ihrer Singularitäten im Endlichen, wie es häufig geschieht, sondern durch Anwendung tieferer Sätze, die von den Singularitäten der Bildfunktion auf das asymptotische Verhalten der Originalfunktion schließen, wobei die Singularität der Bildfunktion im Unendlichen eine wichtige Rolle spielt.

Zum besseren Verständnis des Folgenden sei die Behandlung eines Regelungssystems vermittels Laplace-Transformation im einfachsten Fall vorausgeschickt.



Dieser liegt dann vor, wenn die Regelgröße  $X(t)$  einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten genügt:

$$X^{(n)}(t) + c_{n-1} X^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 X'(t) + c_0 X(t) = F(t), \quad (1)$$

wobei die Anfangswerte als verschwindend vorausgesetzt werden:

$$X(+0) = X'(+0) = \dots = X^{(n-1)}(+0) = 0.$$

Durch die Laplace-Transformation (im folgenden kurz  $\mathcal{L}$ -Transformation genannt)

$$x(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} X(t) dt \equiv \mathcal{L}\{X\}$$

( $X(t)$  = Originalfunktion,  $x(s)$  = Bildfunktion) geht die Differentialgleichung bekanntlich in die algebraische Gleichung

$$s^n x(s) + c_{n-1} s^{n-1} x(s) + \dots + c_1 s x(s) + c_0 x(s) = f(s) \quad (2)$$

über, die, wenn man

$$s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0 = p(s)$$

setzt, die Lösung hat:

$$x(s) = \frac{1}{p(s)} f(s). \quad (3)$$

Die „Ausgangsfunktion“  $x(s)$  entsteht also aus der „Eingangsfunktion“<sup>1</sup>  $f(s)$  durch einfache Multiplikation mit dem „Übertragungsfaktor“

$$q(s) = \frac{1}{p(s)}.$$

$q(s)$  ist eine gebrochen rationale Funktion. Ist die Eingangsfunktion  $F(t)$  der Einheitsstoß

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ 1 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

so ist  $f(s) = \frac{1}{s}$ ; ist  $F(t)$  eine sinusartige Schwingung  $e^{i\omega t}$ , so ist  $f(s) = \frac{1}{s - i\omega}$ . In diesen Fällen ist auch  $x(s)$  eine gebrochen rationale Funktion, die man in Partialbrüche zerlegen kann, welche die Pole  $\alpha_\nu$  der Funktion (die Nullstellen des Nenners) in Evidenz setzen:

$$x(s) = \sum_{\nu} \frac{b_{\nu}}{s - \alpha_{\nu}}, \quad (4a)$$

wenn die Pole einfach sind,

$$x(s) = \sum_{\nu} \left( \frac{b_{\nu}^{(1)}}{s - \alpha_{\nu}} + \frac{b_{\nu}^{(2)}}{(s - \alpha_{\nu})^2} + \dots + \frac{b_{\nu}^{(l_{\nu})}}{(s - \alpha_{\nu})^{l_{\nu}}} \right), \quad (4b)$$

wenn die Pole  $\alpha_{\nu}$  die Mehrfachheiten  $l_{\nu}$  haben.

In dieser Gestalt läßt sich  $x(s)$  unmittelbar in den Originalraum „zurückübersetzen“:

$$X(t) = \sum_{\nu} b_{\nu} e^{\alpha_{\nu} t} \quad (5a)$$

bzw.

$$X(t) = \sum_{\nu} \left( b_{\nu}^{(1)} + \frac{b_{\nu}^{(2)}}{1!} t + \dots + \frac{b_{\nu}^{(l_{\nu})}}{(l_{\nu} - 1)!} t^{l_{\nu} - 1} \right) e^{\alpha_{\nu} t}. \quad (5b)$$

<sup>1</sup> Wir gebrauchen im Bildraum dieselben Ausdrücke, wie sie für die Funktionen des Originalraumes üblich sind.

Die Regelgröße  $X(t)$  ist stabil, wenn sie für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt<sup>2</sup> (eigentliche Stabilität) oder gegen einen anderen festen Wert strebt (uneigentliche Stabilität) oder in endlichen Grenzen schwankt (Quasistabilität). Das Verhalten von  $X(t)$  läßt sich aus den Formeln (5) entnehmen, da  $|e^{\alpha_\nu t}| = e^{\Re \alpha_\nu t}$  ist und das Verhalten der Exponentialfunktion von dem Vorzeichen von  $\Re \alpha_\nu$  abhängt. Numeriert man die Pole  $\alpha_\nu$  von  $x(s)$  in folgender Weise:

$$\Re \alpha_0 \geq \Re \alpha_1 \geq \dots,$$

so gilt, wenn es nur einen Pol mit größtem Realteil gibt: Die Regelung ist

- für  $\Re \alpha_0 > 0$  instabil,
- für  $\Re \alpha_0 < 0$  stabil,
- für  $\Re \alpha_0 = 0$  im Fall  $\alpha_0 = 0$  uneigentlich stabil,  
im Fall  $\Im \alpha_0 \neq 0$  quasistabil, wenn  $\alpha_0$  ein einfacher Pol ist;  
instabil, wenn  $\alpha_0$  ein mehrfacher Pol ist.

Analog ist die Diskussion, wenn es mehrere Pole mit größtem Realteil gibt. Resultat: Die Regelung ist nur dann (in irgend einem Sinn) stabil, wenn keine Pole in der rechten Halbebene liegen und die auf der imaginären Achse liegenden einfach sind.

Um dies festzustellen, braucht man gar nicht erst zu  $x(s)$  die zugehörige Zeitfunktion  $X(t)$  aufzuschreiben, sondern man kann alles an der Bildfunktion  $x(s)$  ablesen.

Dasselbe gilt, wenn  $X(t)$  mit gewissen anderen Größen einem System von mehreren linearen Differentialgleichungen genügt, denn dann tritt an die Stelle von  $\frac{1}{p(s)}$  bekanntlich<sup>3</sup> der Quotient einer Unterdeterminante und der Determinante des zugehörigen Bildsystems, also wieder eine gebrochen rationale Funktion.

Bis hierhin ist die Diskussion vollständig in Ordnung. Es kommen nun aber sehr häufig Fälle vor, in denen  $x(s)$  nicht durch eine gebrochen rationale Funktion dargestellt wird, z. B. bei Regelungen mit Totzeit. Wenn keine „Störgröße“ vorhanden ist, habe der Regelkreis den Übertragungsfaktor  $q(s)$  und die Totzeit  $T$ ; wenn eine Störgröße  $Z(t)$  wirkt und der Regler abgeschaltet ist, habe die Regelstrecke den Übertragungsfaktor  $q_z(s)$  und die Totzeit  $T_z$ . Wird die „Führungsgröße“ mit  $W(t)$  bezeichnet, so ist (siehe HB II, S. 289)

$$x(s) = \frac{q(s) e^{-Ts}}{1 + q(s) e^{-Ts}} w(s) + \frac{q_z(s) e^{-T_z s}}{1 + q(s) e^{-Ts}} z(s). \quad (6)$$

Es genügt, wenn wir den ersten Summanden betrachten, weil der zweite analog gebaut ist. Selbst wenn  $q(s)$  wie vorhin eine gebrochen rationale Funktion ist, so ist  $x(s)$  jetzt eine transzendente (meromorphe) Funktion, die unendlich viele Pole haben kann. Handelt es sich z. B. um ein „integral wirkendes System“ (HB II, S. 279), so ist  $q(s) = \frac{1}{s}$ , und der Nenner  $1 + \frac{1}{s} e^{-Ts}$  hat, wie man leicht sieht, unendlich viele Nullstellen. Da nunmehr offenbar Konvergenzfragen auftauchen, ist es keineswegs sicher, daß man  $x(s)$  in eine zu (4) analoge unendliche Reihe entwickeln kann. Noch weniger sicher ist es, daß man diese in Analogie zu (5) gliedweise übersetzen darf, weil dies auf eine Vertauschung einer unendlichen Reihe mit dem

<sup>2</sup> Wir verstehen unter  $X(t)$  und allen anderen Zeitfunktionen in üblicher Weise die Abweichung vom Normalwert. In der Regelungstechnik werden diese Abweichungen gemäß Normblatt DIN 19226 mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Wir gehen deshalb davon ab, weil in der Theorie der  $\mathcal{L}$ -Transformation die Originalfunktionen mit großen, die Bildfunktionen mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet werden.

<sup>3</sup> Siehe G. Doetsch: Handbuch der Laplace-Transformation, II. Bd., S. 310ff. Basel: Birkhäuser-Verlag, 1955. Dieses Buch wird im folgenden als HB II zitiert.



(uneigentlichen)  $\mathfrak{L}$ -Integral hinausläuft. Trotzdem wird in der Technik auch in einem solchen Fall ohne Bedenken dieselbe Methode wie in dem eingangs geschilderten „endlichen“ Fall angewendet: man untersucht einfach die Lage der Pole zur imaginären Achse, z. B. an Hand des Nyquist-Diagramms, und schließt daraus auf Stabilität oder Instabilität<sup>4</sup>.

Daß diese naive Übertragung der Verhältnisse vom elementaren auf den transzendenten Fall nicht allgemein richtig sein kann, sieht man leicht durch folgende Überlegungen ein: 1. Es kann vorkommen, daß die meromorphe Funktion nur endlich viele Pole hat. Schreibt man nun die Partialbruchentwicklung (4) an, die dann natürlich nur endlich viele Glieder hat, so würde diese besagen, daß die Funktion gar nicht meromorph, sondern gebrochen rational ist. 2. Es kann sogar vorkommen, daß die Funktion gar keine Pole hat, also nicht meromorph, sondern ganz transzendent ist. Dann erhält man überhaupt keine Entwicklung. 3. Der Ausdruck (6) kann eine mehrdeutige Funktion darstellen. Das ist z. B. der Fall, wenn es sich um ein „allgemeines integral wirkendes System“ handelt, bei dem nicht  $q(s) = \frac{k}{s}$ , sondern  $q(s) = \frac{k}{s^\gamma}$  ( $\gamma > 0$  beliebig) ist. Dann ist klar, daß eine Darstellung von  $x(s)$  durch die eindeutige Partialbruchzerlegung überhaupt nicht existieren kann.

Daß das einfache Aufsuchen der im Endlichen gelegenen Singularitäten der Bildfunktion für die Lösung unseres Problems nicht genügt, wollen wir an einem drastischen Beispiel zeigen, indem wir folgende Funktion betrachten:

$$X(t) = -\pi e^t \sin \pi e^t \left[ = \frac{d}{dt} (\cos \pi e^t) \right]. \quad (7)$$

Sie stellt eine höchst unangenehme Schwingung dar, die sich rasch aufschauelt und immer schneller ihr Vorzeichen wechselt. Wir fragen nun: Wie verhält sich das zugehörige  $x(s)$ ? Wo liegen seine Singularitäten? Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob in

$$x(s) = \int_0^\infty e^{-st} (-\pi e^t \sin \pi e^t) dt$$

der Faktor  $e^t$  bewirkte, daß das Integral nur für  $\Re s > 1$  konvergiert, so daß man in  $s = 1$  eine Singularität vermutet, die dann, als rechts von der imaginären Achse gelegen, die Instabilität verraten würde. Nun liefert aber zweimalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_0^\omega e^{-st} (-\pi e^t \sin \pi e^t) dt &= 1 + e^{-s\omega} \cos \pi e^\omega + \frac{s}{\pi} e^{-(s+1)\omega} \sin \pi e^\omega + \\ &+ \frac{s(s+1)}{\pi^2} \int_0^\omega e^{-(s+2)t} (-\pi e^t \sin \pi e^t) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Strebt  $\omega$  gegen  $\infty$ , so hat der zweite Summand für  $\Re s > 0$ , der dritte für  $\Re (s+1) > 0$ , der vierte für  $\Re (s+1) > 0$  einen Grenzwert, so daß  $x(s) = \mathfrak{L}\{X\}$  für  $\Re s > 0$  konvergiert und analytisch ist, also rechts von der imaginären Achse sicher keine Singu-

<sup>4</sup> Derselbe Fehler wird auch sonst oft bei Anwendung der  $\mathfrak{L}$ -Transformation und erst recht beim Heaviside-Kalkül gemacht. Das Heavisidesche „expansion theorem“, das nichts anderes als die Entwicklung (5a) ist, ist richtig für gewöhnliche Differentialgleichungen. Es wird aber häufig auch ohne weiteres bei partiellen Differentialgleichungen verwendet, wo in dem Ausdruck für die Bildfunktion eine meromorphe Funktion vorkommt. Auch hier ist die Entwickelbarkeit der Bildfunktion in eine Partialbruchreihe und die gliedweise Übersetzung in den Originalraum keineswegs allgemein gesichert und kann zu schweren Fehlern führen.

larität besitzt! Aber die Formel (8) fördert ein noch überraschenderes Ergebnis zu Tage: Bei  $\Re s > 0$  liefert sie für  $\omega \rightarrow \infty$  folgende Funktionalgleichung:

$$x(s) = 1 - \frac{s(s+1)}{\pi^2} x(s+2). \quad (9)$$

Diese zeigt, daß sich  $x(s)$  aus der Halbebene  $\Re s > 0$  zunächst in die Halbebene  $\Re s > -2$ , aus dieser in die Halbebene  $\Re s > -4$  usw., also schließlich in die ganze Ebene analytisch fortsetzen läßt. Diese  $\mathfrak{L}$ -Transformierte besitzt also überhaupt keine Singularitäten im Endlichen, die uns die Stabilität oder Instabilität der Originalfunktion  $X(t)$  verraten könnten. Diese kann daher nur mit dem Charakter der (notwendigerweise vorhandenen) Singularität im Punkt  $s = \infty$  zusammenhängen, die bei der Partialbruchzerlegung von  $x(s)$  und der Übersetzung in eine Reihe von Exponentialfunktionen für  $X(t)$  ganz unberücksichtigt bleibt.

Es ist auch von vornherein einzusehen, daß es ganz abwegig ist und dem Wesen des Problems nicht entspricht, erst  $X(t)$  komplett durch Funktionsausdrücke darzustellen und dann an diesen das Verhalten von  $X(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  abzulesen. Das Problem besteht doch lediglich darin, das asymptotische Verhalten von  $X(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  (das heißt für große  $t$ ) festzustellen, und dafür hat die  $\mathfrak{L}$ -Transformation eigene Methoden ausgebildet, die gestatten, dieses Verhalten an der  $\mathfrak{L}$ -Transformierten  $x(s)$  abzulesen, allerdings nicht auf so einfache Weise, wie es die oben geschilderte „naive“ Methode will.

Wenn man das Verhalten von  $X(t)$  aus dem von  $x(s)$  erschließen will, so muß man zunächst  $X(t)$  vermittle  $x(s)$  darstellen. Das geschieht durch die bekannte „komplexe Umkehrformel“ der  $\mathfrak{L}$ -Transformation:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ts} x(s) ds \quad (10)$$

( $a$  ein Punkt im Konvergenzbereich von  $\mathfrak{L}\{X\}$ ), die für solche Funktionen, wie sie in der Regelungstechnik auftreten können, immer gültig ist. Man hat nun zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden.

### I. Die Singularitäten von $x(s)$ sind eindeutig

Es handelt sich dann um Pole oder isolierte wesentlich singuläre Stellen  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ , die wir so angeordnet denken:  $\Re \alpha_0 > \Re \alpha_1 > \dots$ . (Wenn singuläre Stellen mit gleichem Realteil vorkommen, sind sie im folgenden gleichzeitig in Betracht zu ziehen.) Wir führen nun zunächst ein bei dem Integral (10) oft angewandtes Manöver aus: Wir wählen einen Punkt  $\beta_0$  zwischen  $\Re \alpha_0$  und  $\Re \alpha_1$  und bilden ein den Punkt  $\alpha_0$  umschließendes Rechteck aus den Vertikalen bei den Abszissen  $\beta_0$  und  $a$  sowie den Horizontalen in den Höhen  $\pm \omega$ . Dann ist das Integral von  $e^{ts} x(s)$  über den Rand im positiven Sinn, dividiert durch  $2\pi i$ , gleich dem Residuum von  $e^{ts} x(s)$  im Punkt  $\alpha_0$ , also

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{a-i\omega}^{a+i\omega} + \int_{a+i\omega}^{\beta_0+i\omega} + \int_{\beta_0+i\omega}^{\beta_0-i\omega} + \int_{\beta_0-i\omega}^{a-i\omega} e^{ts} x(s) ds \right\} = \text{Residuum von } e^{ts} x(s) \text{ in } \alpha_0. \quad (11)$$

Wenn der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von  $x(s)$  bei  $\alpha_0$  die Gestalt hat:

$$\frac{b_0^{(1)}}{s - \alpha_0} + \frac{b_0^{(2)}}{(s - \alpha_0)^2} + \dots$$

(im Fall eines Poles ist das die endliche Partialbruchreihe (4b)), so ist das Residuum (der Koeffizient von  $(s - \alpha_0)^{-1}$  in der Potenzentwicklung von  $e^{ts} x(s)$ ) gleich

$$\left( b_0^{(1)} + \frac{b_0^{(2)}}{1!} t + \dots \right) e^{\alpha_0 t}.$$



Wir machen nun eine erste Voraussetzung:

V 1.  $x(s)$  strebe für  $s \rightarrow \infty$  gleichmäßig in dem Streifen<sup>5</sup>  $\beta_0 \leq \Re s \leq \alpha$  gegen 0.

Dann streben in (11) die beiden Integrale über die Horizontalseiten für  $\omega \rightarrow \infty$  gegen 0. Ferner strebt dabei das erste Integral in (11) gemäß (10) gegen  $X(t)$ , so daß man erhält:

$$X(t) = \left( b_0^{(1)} + \frac{b_0^{(2)}}{1!} t + \dots \right) e^{\alpha_0 t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_0 - i\infty}^{\beta_0 + i\infty} e^{ts} x(s) ds. \quad (12)$$

Wenn man dieses Verfahren iterieren kann, das heißt, wenn  $x(s)$  in weiteren, links angesetzten Streifen gleichmäßig für  $s \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt, so erhält man für  $X(t)$  eine endliche Entwicklung vom Typus (5b), vermehrt um ein durch ein Integral dargestelltes Restglied:

$$X(t) = \sum_{\nu=0}^n \left( b_\nu^{(1)} + \frac{b_\nu^{(2)}}{1!} t + \dots \right) e^{\alpha_\nu t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_n - i\infty}^{\beta_n + i\infty} e^{ts} x(s) ds, \quad (13)$$

wobei

$$\Re \alpha_{n+1} < \beta_n < \Re \alpha_n$$

ist.

An dieser Stelle erkennt man nun deutlich den Unterschied zwischen den zwei verschiedenen Zielen: Herstellung eines kompletten Ausdruckes für  $X(t)$  und Beurteilung des asymptotischen Verhaltens. Wenn man nämlich  $X(t)$  durch eine Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty}$  wirklich darstellen will, so muß man beweisen, daß das Restintegral bei festem  $t$  für  $n \rightarrow \infty$  (das heißt, wenn der Integrationsweg nach links wandert) gegen 0 strebt. Das ist sehr oft gar nicht wahr, und selbst wenn es wahr ist, schwer zu beweisen. Was ist dagegen vom Standpunkt der Asymptotik aus zu beweisen?

Dazu bemerken wir: Das asymptotische Verhalten einer Funktion  $\varphi(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  beschreiben, heißt: eine Funktion  $\psi_0(t)$ , deren Verhalten leicht zu übersehen ist, finden derart, daß<sup>6</sup>

$$\frac{\varphi(t)}{\psi_0(t)} \rightarrow 1, \text{ das heißt } \varphi(t) = \psi_0(t) + o(\psi_0) \text{ für } t \rightarrow \infty$$

ist. Diese „asymptotische Darstellung“ durch eine Funktion kann man so verallgemeinern:  $\varphi(t)$  gestattet eine asymptotische Entwicklung:

$$\varphi(t) \approx \sum_{\nu} \psi_{\nu}(t),$$

wenn bei festem  $n$  gilt:

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^n \psi_{\nu}(t) + o(\psi_n)$$

für  $t \rightarrow \infty$ .

In diesem Sinne hat  $X(t)$  nach (13) eine asymptotische Entwicklung:

$$X(t) \approx \sum_{\nu} \left( b_\nu^{(1)} + \frac{b_\nu^{(2)}}{1!} t + \dots \right) e^{\alpha_\nu t}, \quad (14)$$

<sup>5</sup> Jede  $\mathcal{L}$ -Transformierte strebt in ihrer Halbebene absoluter Konvergenz gleichmäßig gegen 0, wenn  $s$  nach oben oder unten gegen  $\infty$  wandert. V 1 setzt das auch noch weiter links als zutreffend voraus.

<sup>6</sup> Das in der Mathematik übliche Zeichen klein  $o$  ist so definiert: Es ist  $f(t) = o(\psi)$ , wenn  $f(t)/\psi(t) \rightarrow 0$  ( $f$  ist „von geringerer Größenordnung“ als  $\psi$ ).

wenn bei festem  $n$  (das heißt bei festem  $\beta_n$ )

$$\int_{\beta_n - i\infty}^{\beta_n + i\infty} e^{ts} f(s) ds = o(e^{\alpha_n t}) \quad (15)$$

für  $t \rightarrow \infty$  ist. Dies läßt sich nun viel leichter, das heißt unter viel allgemeineren Voraussetzungen beweisen, als daß das Integral bei festem  $t$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt. Schreibt man das Integral nämlich in der Gestalt ( $s = \beta_n + iy$ ):

$$e^{\beta_n t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} x(\beta_n + iy) dy, \quad (16)$$

so kann man sich eine bekannte Tatsache aus der Theorie der Fourierreihen zunutze machen. Das Integral mit endlichen Grenzen

$$\int_{-\omega}^{+\omega} e^{ity} x(\beta_n + iy) dy$$

ist nichts anderes als der (komplexe) Fourier-Koeffizient von  $x(\beta_n + iy)$ , und ein solcher strebt nach dem sog. Riemann-Lebesgueschen Lemma gegen 0 für  $t \rightarrow \infty$ . Man braucht jetzt nur noch eine Voraussetzung hinzuzufügen, welche diese Aussage auch für unendliche Grenzen richtig macht. Als brauchbar erweist sich hierfür die folgende:

## V 2. Das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} x(\beta_n + iy) dy$$

sei für große  $t$ , das heißt für  $t \geq T$ , gleichmäßig konvergent<sup>7</sup>.

Dann lassen sich nämlich die hinzukommenden Integrale  $\int_{-\infty}^{-\omega}$  und  $\int_{+\omega}^{+\infty}$  von vornherein für alle großen  $t$  klein machen.

Unter dieser Bedingung ist das Restintegral (16) gleich  $o(e^{\beta_n t})$ , und wegen  $\beta_n < \Re \alpha_n$  ist dann die Bedingung (15) reichlich erfüllt. Wie man sieht, wird hier viel weniger verlangt als bei der kompletten Darstellung von  $X(t)$ , und trotzdem genügt das Ergebnis vollauf zur Beurteilung der Stabilität von  $X(t)$ .

Im Hinblick auf das Folgende sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die asymptotische Entwicklung (14) nach den Exponentialfunktionen  $e^{\alpha_\nu t}$  läuft. Die davor stehenden Klammern sind auch bei unendlicher Gliederanzahl als geschlossene Funktionen und nicht etwa als asymptotische Entwicklungen anzusehen. Sie wachsen übrigens nicht stärker als  $e^{\varepsilon t}$  mit beliebig kleinem  $\varepsilon > 0$ .

<sup>7</sup> Diese Voraussetzung ist sicher erfüllt, wenn das Integral absolut konvergiert, das heißt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(\beta_n + iy)| dy < \infty.$$

Aber die Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz ist in den Anwendungen bedeutend vorteilhafter, denn schon ein so einfaches Integral wie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} \frac{1}{y^\alpha} dy \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1$$

konvergiert nicht absolut, aber gleichmäßig für  $t \geq T > 0$ .



Die beiden Bedingungen V 1 und V 2, die wir benutzt haben, beziehen sich offensichtlich auf das Verhalten von  $x(s)$  im Unendlichen, so daß sich dieses, wie angekündigt, als grundlegend für das asymptotische Verhalten von  $X(t)$  erweist.

## II. Die am weitesten rechts gelegene Singularität von $x(s)$ ist mehrdeutig

Sie ist also etwa vom Charakter  $(s - \alpha_0)^{\frac{1}{2}}$  oder  $(s - \alpha_0)^{-\frac{1}{2}}$  oder  $\log(s - \alpha_0)$ . In diesem Fall ist keine Residuenrechnung möglich, jedoch hat sich hier folgender Satz aus der Theorie der  $\mathcal{L}$ -Transformation<sup>8</sup> als brauchbar und oft anwendbar erwiesen (vgl. HB II, S. 165 bis 173).

Es soll zunächst möglich sein, den vertikalen Integrationsweg mit der Abszisse  $a$  zu ersetzen durch einen winkelförmigen Weg, der aus einem den singulären Punkt  $\alpha_0$  auf der rechten Seite umlaufenden Kreisbogen und zwei Strahlen besteht, die unter den Winkeln  $\pm \vartheta$  ( $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ ) gegen die positiv reelle Achse geneigt sind. Das ist sicher möglich, wenn  $x(s)$  in dem Gebiet zwischen dem alten und dem neuen Integrationsweg für  $s \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen 0 strebt. Sodann soll  $x(s)$  an der Stelle  $\alpha_0$  in eine Reihe nach beliebigen Potenzen (etwa z. B. mit den Exponenten  $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ ) entwickelbar sein:

$$x(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (s - \alpha_0)^{\lambda_{\nu}} \quad (\lambda_0 < \lambda_1 < \dots).$$

Dann gilt für  $X(t)$  folgende asymptotische Entwicklung:

$$X(t) \approx e^{\alpha_0 t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{\Gamma(-\lambda_{\nu})} t^{-\lambda_{\nu}-1} \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

wobei  $\frac{1}{\Gamma(-\lambda_{\nu})} = 0$  zu setzen ist, wenn  $\lambda_{\nu}$  einen der Werte  $0, 1, 2, \dots$  annimmt.

Nach der oben angegebenen Definition ist das so zu verstehen, daß für große  $t$

$$X(t) = e^{\alpha_0 t} \sum_{\nu=0}^n \frac{c_{\nu}}{\Gamma(-\lambda_{\nu})} t^{-\lambda_{\nu}-1} + o(e^{\alpha_0 t} t^{-\lambda_n-1})$$

bei festem  $n$  ist.

Wie man sieht, kommt in dem Fall, daß die am weitesten rechts gelegene Singularität mehrdeutig ist, nur diese zum Zug. (Haben mehrere Singularitäten denselben größten Realteil, so sind die von ihnen herrührenden Entwicklungen zu superponieren.) Weiter links gelegene Singularitäten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  kommen in diesem Fall schon deshalb nicht in Betracht, weil die von ihnen gelieferten Beiträge mit den Faktoren  $e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}, \dots$  behaftet, also wegen  $\Re \alpha_1 < \Re \alpha_0, \dots$  von geringerer Größenordnung sind als die unendlich vielen Glieder  $e^{\alpha_0 t} t^{-\lambda_{\nu}-1}$ , so daß sie erst hinter diesen, das heißt praktisch überhaupt nicht zu berücksichtigen wären. (Nebenbei bemerkt, können diese links gelegenen Singularitäten in rein mathematischen Untersuchungen von Bedeutung für das asymptotische Verhalten von  $X(t)$  sein, wenn  $t$  nicht durch die reellen Werte, sondern auf einem Strahl im Komplexen gegen  $\infty$  läuft.)

Auch hier sieht man wieder, daß nicht bloß das Verhalten von  $x(s)$  an den singulären Stellen im Endlichen, sondern auch an der Stelle  $\infty$  für das asymptotische Verhalten von  $X(t)$  ausschlaggebend ist, denn von dem Verhalten im Unendlichen hängt es ab, ob man den geradlinigen Integrationsweg in einen winkelförmigen verwandeln kann.

<sup>8</sup> Siehe HB II, S. 159. Wir führen hier nur einen Spezialfall des Satzes an; a. a. O. finden sich noch weitere Fälle, die sich auf andere Singularitätstypen beziehen.

Zusammenfassend kann man sagen: Eine mathematische Legitimierung der in der Technik vielbenutzten Korrespondenz zwischen der Lage der Singularitäten von  $x(s)$  zur imaginären Achse und dem stabilen oder instabilen Verhalten von  $X(t)$  ist nur möglich, wenn man 1. sich von der Vorstellung,  $X(t)$  müsse durch eine Reihe komplett dargestellt werden, löst und von vornherein nur auf eine asymptotische Darstellung von  $X(t)$  ausgeht, 2. den Einfluß der Singularität von  $x(s)$  im Unendlichen gebührend berücksichtigt.

(Eingegangen am 18. Februar 1956)

## Zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Deutung gewisser Mannschaftswettkämpfe

Von W. Eberl, Wien

**Zusammenfassung.** Es wird ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell für Fußball, Hockey usw. entwickelt, das die Vorgänge auf dem Spielfeld nach Art einer Brownschen Bewegung deutet. Unter anderem wird der Begriff der Spielstärke definiert und ein Weg zur Ermittlung der Rangordnung der einzelnen Teilnehmer eines Systems von Spielen beschrieben.

**1. Schematisierungen, Voraussetzungen und Bezeichnungen.** Im folgenden wird die Terminologie des Fußballspieles verwendet, da diese am bekanntesten ist. Auf der Verbindungslinie  $g$  der beiden Tormitten führen wir ein eindimensionales Koordinatensystem ein: Den Ursprung wählen wir in der Mitte des Spielfeldes, das links (rechts) gelegene Tor der Mannschaft  $A_1$  ( $A_2$ ) erhält die Koordinate  $-a$  ( $a$ ). Die Mannschaft  $A_1$  beginnt das Spiel in der Mitte des Spielfeldes, sie hat, wie man sagt, *Anstoß* und spielt nach rechts,  $A_2$  nach links. Die Bewegung des Balles wird normal auf  $g$  projiziert. Diese Projektion führt auf  $g$  eine Art eindimensionaler Brownscher Bewegung aus, in der neben dem Zufall vor allem die Spielstärken von  $A_1$  und  $A_2$  zum Ausdruck kommen. Nur von der Bewegung dieser Projektion wird im folgenden die Rede sein.

Ein Ballwechsel findet dann statt, wenn der Ball aus dem Besitz der einen Mannschaft in den der anderen übergeht. Natürlich muß dieser Zeitpunkt in eindeutiger Weise festgelegt werden, da sich der Ball durchaus nicht immer in der Verfügungsgewalt eines Spielers befinden wird. Wir werden von einem *Ballwechsel* immer dann sprechen, wenn die Bewegung des Balles ihren Richtungssinn auf  $g$  ändert, da sich ja jeder Spieler bemühen wird, den Ball vom eigenen Tor weg auf das Gegentor hin zu treiben. Den Anstoß durch  $A_1$  betrachten wir als 0-ten Ballwechsel.  $x_n$  ist die Länge der Strecke, die der Ball zwischen dem  $n-1$ -ten und dem  $n$ -ten Ballwechsel auf  $g$  zurücklegt. Ist die natürliche Zahl  $n$  ungerade, so ist  $x_n$  nach rechts, andernfalls nach links aufzutragen. Zur Zurücklegung dieses Weges benötigt der Ball die Zeit  $t_n$ . Kommt es zu einem Tor, so wird  $t_n$  vom letzten Ballwechsel bis zum Zeitpunkt des Tores gerechnet, und  $x_n$  so gemessen, daß der Ball hinter das Tor zu liegen kommt. Das geordnete Zahlenpaar  $(x_n, t_n)$  heißt die *n-te Spielphase*. Die Lage des Balles

zur Zeit  $T_n = \sum_{i=1}^n t_i$  ist

$$X_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i. \quad (1)$$

Indem wir zunächst von der zeitlichen Begrenzung des Spieles absehen, nehmen wir an, daß die Spielphasen  $(x_n, t_n)$  für  $n = 1, 2, \dots$  unabhängig voneinander stetig verteilte zweidimensionale (zufällige) Merkmale sind, deren *WD* (Wahrscheinlichkeitsdichte) durch eine von  $r$  Parametern  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  in stetiger Weise abhängige stetige



Funktion von  $x$  und  $t$  bestimmt ist. ( $x_n$  und  $t_n$  werden natürlich nicht unabhängig sein, nur die Spielphasen untereinander sind es!) Die  $\lambda$  seien auf ein abgeschlossenes Intervall des  $R_r$  beschränkt. Im einzelnen sei:

$$\begin{aligned} WD(x_n, t_n) &= f(x_n, t_n; \overset{1}{\lambda}_1, \dots, \overset{1}{\lambda}_r) = f_1(x_n, t_n) > 0, \\ &\text{wenn } x_n > 0, t_n > 0 \text{ und } n \text{ ungerade;} \\ &= f(x_n, t_n; \overset{2}{\lambda}_1, \dots, \overset{2}{\lambda}_r) = f_2(x_n, t_n) > 0, \\ &\text{wenn } x_n > 0, t_n > 0 \text{ und } n \text{ gerade;} \\ &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Für die gegenseitigen Spielstärken von  $A_1$  und  $A_2$  sind also die beiden Parametersätze  $\overset{p}{\lambda}_1, \dots, \overset{p}{\lambda}_r$ ,  $p = 1, 2$ , kennzeichnend.

**2. Merkmalräume.** Wir betrachten als Merkmalraum  $M_1$  alle Folgen von Spielphasen  $(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots$ , wobei nach unserer Festsetzung  $(x_1, t_1)$  durch den Anstoß von  $A_1$  eingeleitet wird. Folgende Teilräume oder Ereignisse sind für uns wichtig:

a)  $U_n$ : Das Spiel verlief bisher torlos und auch  $(x_n, t_n)$  führt zu keinem Tor.  $U_n$  wird durch die Ungleichungen

$$-a \leq X_k \leq a, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

festgelegt. Wegen (1) und  $x_n \geq 0$  ist (2) gleichbedeutend mit

$$0 \leq x_k \leq a + (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j x_j, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2a)$$

b)  $V_n$ : Das Spiel verlief bisher torlos, aber  $(x_n, t_n)$  führt zu einem Tor.  $V_n$  wird durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} -a \leq X_k \leq a, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ |X_n| > a \end{aligned} \quad (3)$$

bestimmt. Gleichbedeutend damit ist

$$\begin{aligned} 0 \leq x_k \leq a + (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j x_j, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ x_n > a + (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j x_j. \end{aligned} \quad (3a)$$

c)  $\overset{11}{V}$ :  $A_1$  schießt das erste Tor. Da die  $V_n$  zueinander fremd sind, schreiben wir die Vereinigungsmenge der  $V_{2m-1}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , mit einem gewöhnlichen Summen-

zeichen:  $\overset{11}{V} = \sum_{m=1}^{\infty} V_{2m-1}$ .

d)  $\overset{12}{V}$ :  $A_2$  schießt das 1. Tor:  $\overset{12}{V} = \sum_{m=1}^{\infty} V_{2m}$ .

Der erste Index in  $\overset{11}{V}$  und  $\overset{12}{V}$ , nämlich 1, drückt aus, daß es sich um Ereignisse im Merkmalraum  $M_1$  handelt. In einem Merkmalraum  $M_2$ , in dem  $A_2$  das Spiel beginnt, bezeichnen wir die entsprechenden Ereignisse mit  $\overset{21}{V}$  und  $\overset{22}{V}$ .

Die in a bis d definierten Teilräume sind Zylinderräume, das heißt für alle in den Bedingungsungleichungen nicht angeführten Merkmale sind unabhängig voneinander alle Werte von 0 bis  $\infty$  zugelassen.

**3. Wahrscheinlichkeiten der Teilräume.** Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Spielphasen voneinander ist es leicht, die  $W_n$  (Wahrscheinlichkeiten) der

angeführten Teilräume zu bestimmen. Zunächst integrieren wir das Produkt der WDn über die Merkmale, die in den Ungleichungen (2) bis (3a) nicht vorkommen, von 0 bis  $\infty$ . Dann bleibt im Integranden nur mehr das Produkt der WDn der Randverteilungen von  $x_1$  bis  $x_n$ . Es ist

$$WD(x_n) = \begin{cases} \int_0^\infty f_1(x_n, t) dt & \text{für ungerade } n, \\ \int_0^\infty f_2(x_n, t) dt & \text{für gerade } n. \end{cases} \quad (4)$$

Wir setzen  $\mathfrak{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$  und  $d\mathfrak{x}_n = dx_1 \dots dx_n$  und bezeichnen den durch (2) oder (2a) definierten  $\mathfrak{x}_n$ -Raum mit  $U_{nx}$  und den durch (3) oder (3a) bestimmten  $\mathfrak{x}_n$ -Raum mit  $V_{nx}$ . Dann ist

$$WD(\mathfrak{x}_n) = \prod_{i=1}^n WD(x_i) \text{ und } W(U_n) = \int \dots \int_{U_{nx}} WD(\mathfrak{x}_n) d\mathfrak{x}_n.$$

Mit Hilfe von (2a) schreibt sich dieses Integral ausführlicher:

$$W(U_n) = \int_0^a WD(x_1) dx_1 \int_0^{a+x_1} WD(x_2) dx_2 \int_0^{a-x_1+x_2} \dots \int_0^{a+(-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j x_j} WD(x_n) dx_n. \quad (5)$$

Genau so ergibt sich  $W(V_n) = \int \dots \int_{V_{nx}} WD(\mathfrak{x}_n) d\mathfrak{x}_n$  oder ausführlicher:

$$W(V_n) = \int_0^a WD(x_1) dx_1 \int_0^{a+x_1} WD(x_2) dx_2 \int_0^{a-x_1+x_2} \dots \int_0^{a+(-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j x_j} WD(x_n) dx_n. \quad (6)$$

Wir zeigen jetzt, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} W(U_n) = 0$  ist, das heißt, daß es bei unbegrenzt wachsendem  $n$  mit der Wahrscheinlichkeit 1 zu einem Tor für  $A_1$  oder  $A_2$  kommt.  $U_n$  ist ein Teilraum von  $-a \leq X_n \leq a$  und es genügt daher zu zeigen, daß  $X_n$  für  $n \rightarrow \infty$  mit einer nach 0 gehenden Wahrscheinlichkeit in das Intervall  $[-a, a]$  hineinfällt. Nach dem zentralen Grenzwertsatz<sup>1</sup> ist  $X_n$  für große  $n$  (als Summe von 2 normalverteilten Merkmalen) selbst normalverteilt, und zwar mit dem Mittelwert  $\left[\frac{n+1}{2}\right] \mu_1 - \left[\frac{n}{2}\right] \mu_2$  und der Streuung  $\left[\frac{n+1}{2}\right] \sigma_1^2 + \left[\frac{n}{2}\right] \sigma_2^2$ , wenn  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die Mittelwerte,  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  die Streuungen von  $x_1$  bzw.  $x_2$  sind. ( $[a]$  ist die größte ganze Zahl, für die  $a-1 < [a] \leq a$  gilt.) Im Falle  $\mu_1 = \mu_2$  reicht das Anwachsen der Standardabweichung (Ordnung  $\frac{1}{2}$ ) aus, um die fragliche Wahrscheinlichkeit zum Verschwinden zu bringen; ist aber  $\mu_1 \neq \mu_2$ , dann strebt der Mittelwert von  $X_n$  von erster Ordnung nach links ( $\mu_1 < \mu_2$ ) oder nach rechts ( $\mu_1 > \mu_2$ ) gegen  $\infty$ . Da die Standardabweichung aber nur von der Ordnung  $\frac{1}{2}$  nach  $\infty$  strebt, geht die Wahrscheinlichkeit des endlichen Intervalls  $[-a, a]$  wieder nach 0.

Die  $W$  für  $A_1$  ( $A_2$ ), das 1. Tor zu schießen, ist  $W(V) = \sum_{m=1}^{11} W(V_{2m-1})$  bzw.  $W(V) = \sum_{m=1}^{12} W(V_{2m})$ . Genau so findet man in  $M_2$  die  $W_n$   $W(V)$  und  $W(V)$ . Wegen  $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = 1$  ist dabei

$$W(V) + W(V) = W(V) + W(V) = 1. \quad (7)$$

<sup>1</sup> Siehe z. B.: L. Schmetterer, Einführung in die mathematische Statistik. Springer, Wien, 1956.



Da der Integrand von  $W(V_n)$  in den inneren Punkten des Integrationsbereiches größer als 0 ist, ist  $W(V_n)$  ebenfalls größer als 0. Daher sind die vier in (7) angeführten  $W_n$  alle größer als 0.

**4. Die Spielstärke.** In einem Wettspiel ist es das Ziel einer jeden Mannschaft, möglichst viele Tore zu schießen und möglichst wenig Tore zu bekommen. Es liegt daher nahe, die *Spielstärke von  $A_1$  in bezug auf  $A_2$*  auf Grund eines bestimmten Wettspieles durch  $(W^{11}(V) + W^{21}(V))/(W^{12}(V) + W^{22}(V))$  zu definieren, indem man  $A_2$  stillschweigend die Spielstärke 1 zuschreibt. Anders ausgedrückt: Die Spielstärken von  $A_1$  und  $A_2$  verhalten sich wie  $(W^{11}(V) + W^{21}(V))/(W^{12}(V) + W^{22}(V))$ . Im Sinne der Häufigkeitsdeutung der Wahrscheinlichkeit ist dann, vorausgesetzt, daß beide Mannschaften gleich oft Anstoß haben, das *Verhältnis der Spielstärken durch den Grenzwert des Torverhältnisses bei unbegrenzter Spieldauer gegeben*. Die tatsächlich geübte Regel, daß außer zu Beginn einer Halbzeit immer die Mannschaft Anstoß hat, die das letzte Tor erhalten hat, würde den Zusammenhang von Spielstärke und Torverhältnis zugunsten des Schwächeren verfälschen, wenn der Anstoß eine merkliche Rolle spielte, was aber bekanntlich nicht der Fall ist.

Das Modell, soweit wir es bisher behandelt haben, weist starke Ähnlichkeiten mit der Waldschen Sequentialanalyse auf: Den beiden Grundgesamtheiten mit dem Wertevorrat  $0 < x < +\infty$  und den Wahrscheinlichkeitsdichten  $\int_0^\infty f_p(x, t) dt$ ,  $p = 1, 2$ , werden abwechselnd so lange Stichproben entnommen, bis erstmalig entweder  $X_n > a$  oder  $X_n < -a$  eintritt, worauf mit den „Stichprobenerhebungen“ von neuem begonnen wird. Die Sache wird allerdings anders, wenn wir auch die Zeit in den Kreis unserer Betrachtungen aufnehmen.

**5. Berücksichtigung der Zeit.** In unserer Definition der Spielstärke kommen nur mehr die unbekannten Parameter  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ,  $p = 1, 2$  vor. Um zu Schätzwerten der Spielstärken zu kommen, haben wir uns zuerst einmal Schätzwerte  $l_1, \dots, l_r$  der  $\lambda$  zu verschaffen. Indem man statt der  $\lambda$  in die Quotienten, durch die wir die Spielstärken definiert haben, die  $l$ -Werte einsetzt, erhält man Schätzwerte der Spielstärken.

Die Auskunft, die ein Wettkampf über die Spielstärke der beteiligten Mannschaften liefert, kann man ohne großen technischen und personellen Aufwand am einfachsten festhalten, indem man die Zeiten der einzelnen Tore und damit auch die Dauer des torlosen Spieles nach dem letzten Treffer in jeder Halbzeit notiert. Für einen solcherart festgehaltenen Spielverlauf haben wir dann die Likelihood-Funktion aufzustellen und durch Aufsuchen der Maximum-Likelihood-Schätzfunktionen für die  $\lambda$  zu maximisieren.

Wir suchen zuerst die WD, daß sich zur Zeit  $T_n$  als Ergebnis der  $n$ -ten Spielphase ein Tor einstellt. Wir setzen  $t = (t_1, \dots, t_n)$ . Die in

$$WD(x_n, t_n) = \prod_{i=1}^n WD(x_i, t_i) \quad (8)$$

vorkommenden  $t_i$  transformieren wir durch  $t_i = -T_{i-1} + T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $T_0 = 0$ , wobei die Funktionaldeterminante den Wert 1 hat. Dann integrieren wir (8) über  $V_{nx}$  nach  $x_n$  und über den durch  $T_{i-1} \leq T_i \leq T_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $T_0 = 0$ , bestimmten  $n-1$ -dimensionalen  $T_i$ -Bereich (bei festgehaltenem  $T_n = \sum_{i=1}^n t_i$  also) nach  $T_1, \dots, T_{n-1}$ . Das Ergebnis dieser Integration ist  $WD(V_n, T_n)$ , die WD eines Tores zur Zeit  $T_n$  als Ergebnis der  $n$ -ten Spielphase, und stellt hinsichtlich der  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ein  $n-1$ -faches

Faltprodukt dar, das auch auf dem Wege über die charakteristischen Funktionen hätte ermittelt werden können.  $\int_0^\infty WD(V_n, T_n) dT_n = W(V_n)$ , und diesen Wert haben wir bereits in (6) ermittelt.

Durch Zurückgehen auf die Verteilungsfunktionen zeigt man: die WD, daß zur Zeit  $T_n = T$  gerade  $A_1$  das erste Tor seit dem Anstoß durch  $A_1$  schießt, ist

$$WD(V, T) = \sum_{m=1}^{11} WD(V_{2m-1}, T)$$

und entsprechend ist

$$WD(V, T) = \sum_{m=1}^{12} WD(V_{2m}, T).$$

Genau so gewinnt man mit Hilfe von  $M_2$   $WD(V, T)$  und  $WD(V, T)$ .

**6. Der Spielverlauf und seine WD.** Da in einem Spiel von begrenzter Dauer nur eine beschränkte Anzahl von Treffern erzielt werden kann, können wir den Spielverlauf während einer Halbzeit, durch eine endliche Folge von Zahlentripeln  $(p_0, p_1, d_1), (p_1, p_2, d_2), \dots, (p_{n-1}, p_n, d_n), (p_n, 0, d_{n+1})$ , *Spielabschnitte* genannt, beschreiben. Die  $p_i, i = 0, 1, \dots, n$ , sind die Ziffern 1 oder 2 und geben an (erste Zahl), ob  $A_1$  oder  $A_2$  Anstoß hat, bzw. (zweite Zahl) ob  $A_1$  oder  $A_2$  ein Tor erhalten hat. Da bei Fußball jeweils die Mannschaft beginnt, die das letzte Tor erhalten hat, so ist die zweite Zahl jedes Tripels gleich der ersten des folgenden.  $d_i$  ist die Zeit zwischen dem  $i-1$ -ten und dem  $i$ -ten Tor, das heißt die Dauer des  $i$ -ten Spielabschnittes. Die 0 im letzten Tripel besagt, daß es in dieser Halbzeit zu keinem Treffer mehr kommt.  $d = \sum_{i=1}^{n+1} d_i$  ist die Dauer der Halbzeit.

Die WD für das Tripel  $(p_{i-1}, p_i, d_i)$  haben wir bereits am Ende von 5 ermittelt. Sie ist  $WD\left(\begin{smallmatrix} p_{i-1} & p_i \\ V & d_i \end{smallmatrix}\right), i = 1, \dots, n$ . Da die WD jedes Spielabschnittes vom Ausgang des vorangehenden abhängt, haben wir es mit verketteten Ereignissen zu tun. Nehmen wir aber an, daß  $WD\left(\begin{smallmatrix} 1p \\ V & t \end{smallmatrix}\right) = WD\left(\begin{smallmatrix} 2p \\ V & t \end{smallmatrix}\right), p = 1, 2$ , so sind die einzelnen Spielabschnitte stochastisch unabhängig.

Die W des letzten torlosen Abschnittes ergibt sich so: Das Ereignis, daß es in der Zeit von  $\sum_{i=1}^n d_i$  bis  $d$  zu keinem Tor kommt, ist gleichbedeutend damit, daß, ganz gleich, ob  $A_1$  oder  $A_2$  das nächste Tor erhält, die Dauer des  $n+1$ -ten Abschnittes in einem unbegrenzten Spiel größer als  $d_{n+1}$  ist. Daher gilt

$$W(p_n, 0, d_{n+1}) = \int_{d_{n+1}}^\infty \left( WD\left(\begin{smallmatrix} p_n^1 \\ V & t \end{smallmatrix}\right) + WD\left(\begin{smallmatrix} p_n^2 \\ V & t \end{smallmatrix}\right) \right) dt.$$

Die WD des Spielablaufes während dieser Halbzeit ist daher

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n WD(p_{i-1}, p_i, d_i) \cdot W(p_n, 0, d_{n+1}) = \\ & = \prod_{i=1}^n WD\left(\begin{smallmatrix} p_{i-1} & p_i \\ V & d_i \end{smallmatrix}\right) \int_{d_{n+1}}^\infty \left( WD\left(\begin{smallmatrix} p_n^1 \\ V & t \end{smallmatrix}\right) + WD\left(\begin{smallmatrix} p_n^2 \\ V & t \end{smallmatrix}\right) \right) dt. \end{aligned}$$

Die auf der rechten Seite stehende Funktion hängt nur mehr von den beobachteten Größen  $p_i$  und  $d_i$  und von den unbekannten Parametern  $\lambda_1^p, \dots, \lambda_r^p, p = 1, 2$ , ab. Als Funktion der  $\lambda$  aufgefaßt, ist sie daher die Likelihood-Funktion  $L(\lambda_1^1, \dots, \lambda_r^1; \lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2)$ , deren Maximum für  $l_1^1, \dots, l_r^1; l_1^2, \dots, l_r^2$  eintreten möge. Die  $l$  sind



dann unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen<sup>1</sup> über die  $\varphi_p(x_n, t_n)$  die Maximum-Likelihood-Schätzwerte der  $\lambda$  und liefern uns, an Stelle der  $\lambda$  in die  $W(V)$ ,  $p, q = 1, 2$ , eingesetzt, Schätzwerte der Spielstärken.

**7. Ausgleichung der Spielstärken.** In einer Gesamtheit von  $m$  Mannschaften  $A_1, \dots, A_m$  habe jede Mannschaft gegen jede andere gleich oft gespielt, und es soll jetzt eine Rangordnung für die Spielstärken der  $A_i$  aufgestellt werden. Wir kennen dabei für je zwei Mannschaften  $A_i$  und  $A_j$  einen Schätzwert für das Verhältnis ihrer Spielstärken, den wir durch Berücksichtigung aller Ergebnisse von Wettspielen zwischen  $A_i$  und  $A_j$  gewonnen haben. Unser Modell gibt uns leider keine Handhabe, wie wir aus der Spielstärke von  $A_i$  in bezug auf  $A_j$  und der Spielstärke von  $A_j$  in bezug auf  $A_k$  auf die Spielstärke von  $A_i$  in bezug auf  $A_k$  schließen können. Trotzdem werden wir die Tatsache, daß auf Grund von Wettspielergebnissen  $A_i$  spielstärker als  $A_j$ ,  $A_j$  spielstärker als  $A_k$  und schließlich  $A_k$  spielstärker als  $A_i$  ist, als widerspruchsvoll empfinden und dem Einfluß des Zufalles sowie Schwankungen der Spielstärke zuschreiben. Uns obliegt daher die Aufgabe, die durch Schätzung gewonnenen Spielstärkenverhältnisse von je zwei Mannschaften oder, wie wir kurz sagen, die beobachteten Spielstärken auszugleichen.

Es wäre nun von großem Vorteil, wenn wir über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der beobachteten Spielstärken etwas Positives wüßten. Das ist aber leider nicht der Fall. Bereits die  $\lambda$  gelten für jede Mannschaft immer nur in bezug auf einen bestimmten Gegner und schwanken außerdem in Abhängigkeit von der Kondition der Mannschaft, die wieder durch eine Reihe äußerer Faktoren bestimmt ist (eigener oder fremder Platz, Tagesform der Spieler, Wetter, Bodenverhältnisse u. a. m.). Von diesen unbekannten Parametern sind uns außerdem nur Schätzwerte bekannt, so daß die Schwankung der  $\lambda$  noch von der Stichprobenschwankung der  $l$  überlagert wird. Da wir also die Verteilung der  $l$  nicht kennen, ist uns auch die Verteilung der beobachteten Spielstärken, die ja Funktionen der  $l$  sind, reichlich unbekannt.

In dieser unangenehmen Lage bleibt uns nichts anderes übrig, als unter Verzicht auf eine wahrscheinlichkeitstheoretische Fundierung und unter Zugrundelegung einer einigermaßen plausiblen Hypothese die beobachteten Spielstärken nach der Methode der kleinsten Quadrate auszugleichen. Unsere Annahme besteht nun darin, daß die „wahren“ Spielstärken von  $A_1, \dots, A_m$  in einem bestimmten festen Verhältnis zueinander stehen, von dem die beobachteten Spielstärken nur zufällig abweichen. Anders ausgedrückt: Das Verhältnis der wahren Spielstärken von  $A_i$  zu  $A_k$  ist gleich dem Produkt der wahren Spielstärkenverhältnisse von  $A_i$  zu  $A_j$  und  $A_j$  zu  $A_k$ .

Zwecks Vereinfachung des Folgenden nehmen wir an, daß die Torwahrscheinlichkeiten davon unabhängig sind, welche Mannschaft Anstoß hat, was durchaus den wirklichen Verhältnissen entspricht. Dementsprechend bezeichnen wir mit  $w_{ij}$  den Schätzwert der Wahrscheinlichkeit, daß im Spiel von  $A_i$  und  $A_j$  die Mannschaft  $A_j$  das erste Tor erhält. Wegen (7) ist  $w_{ji} = 1 - w_{ij}$ . Die beobachtete Spielstärke von  $A_i$  in bezug auf  $A_j$  ist  $w_{ij}/w_{ji}$ .  $w_{ij} = \frac{1}{2}$ , wenn entweder  $i = j$  oder wenn das Spiel  $A_i$  gegen  $A_j$  torlos endet.

Als Grundlage einer Rangordnung von  $A_1, \dots, A_m$  erhalten wir daher die  $m$ -reihige Matrix  $(w_{ij}/w_{ji})$ , in der symmetrisch zur Hauptdiagonale gelegene Elemente zueinander reziprok sind, und in der Hauptdiagonale somit nur Einsen vorkommen. Die entsprechende Matrix der ausgeglichenen Spielstärken sei  $(\bar{w}_{ij}/\bar{w}_{ji})$ . Für ihre Elemente muß auf Grund unserer Annahme

$$\frac{\bar{w}_{ij}}{\bar{w}_{ji}} = \frac{\bar{w}_{ik}}{\bar{w}_{ki}} \frac{\bar{w}_{kj}}{\bar{w}_{jk}} \quad (9)$$

gelten.  $k = 1$  zeigt, daß man jedes Element als Produkt eines Elementes der 1. Zeile und eines Elementes der 1. Spalte darstellen kann.

Wenn die Quotienten der  $w_{ij}/w_{ji}$  und der  $\bar{w}_{ij}/\bar{w}_{ji}$  nahe an 1 liegen, dann unterscheiden sich die Logarithmen der  $w_{ij}/w_{ji}$  und der  $\bar{w}_{ij}/\bar{w}_{ji}$  nur wenig von 0. Wir wenden daher die Methode der kleinsten Quadrate auf die Matrix der Logarithmen der Spielstärken an.

Wir setzen  $x_{ij} = \ln(w_{ij}/w_{ji})$  und  $\bar{x}_{ij} = \ln(\bar{w}_{ij}/\bar{w}_{ji})$ . Dann ist wegen (9)

$$\bar{x}_{ij} = \bar{x}_{i1} + \bar{x}_{1j} = \bar{x}_{i1} - \bar{x}_{j1},$$

da  $\bar{x}_{ij}$  alternierend ist. Aus demselben Grund genügt es, sich bei der Approximation auf die oberhalb der Hauptdiagonale gelegenen Elemente ( $i < j$ ) zu beschränken. Wir verlangen also  $\sum_{i < j} (x_{ij} - \bar{x}_{i1} + \bar{x}_{j1})^2 = \text{Min.}$  Offenbar sind die  $\bar{x}_{i1}$  durch diese Forderung nur bis auf eine gemeinsame additive Konstante bestimmt. Wir verlangen daher zusätzlich noch  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_{i1} = 0$ . Ableitung der Quadratsumme nach  $x_{k1}$  und Nullsetzen gibt:

$$\sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_{i1} + \bar{x}_{j1}) (\delta_{ik} - \delta_{jk}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \bar{x}_{i1} + (1-m) \bar{x}_{k1} + \sum_{i=k+1}^m \bar{x}_{i1} = \sum_{i=1}^{k-1} x_{ik} - \sum_{i=k+1}^m x_{kj}.$$

Wegen  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_{i1} = 0$ ,  $x_{ik} = -x_{ki}$  und  $x_{kk} = \ln 1 = 0$  folgt daraus

$$\bar{x}_{k1} = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{ik} \quad \text{und} \quad \bar{x}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ik} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{kj}.$$

Antilogarithmieren führt auf

$$\frac{\bar{w}_{ij}}{\bar{w}_{ji}} = \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m \left( \frac{w_{ik}}{w_{ki}} \cdot \frac{w_{kj}}{w_{jk}} \right)}.$$

In Worten: Man findet die ausgeglichene Spielstärke von  $A_i$  in bezug auf  $A_j$ , indem man alle Spielstärken der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte miteinander multipliziert und aus dem Produkt die  $m$ -te Wurzel zieht. Ein gewiß sehr plausibles Resultat. Da dieses System von Spielstärken in sich widerspruchsfrei ist, kann man die Rangordnung der Mannschaften jeder beliebigen Zeile oder Spalte entnehmen.

**8. Schluß.** Modellbildungen auf sportlichem Gebiete sind nichts Neues. So analysiert W. Elderton in „Cricket scores and some skew distributions“ (J.R.S.S. 1945) Cricketresultate und S. Vajda bespricht (und verwirft) in „Einige statistische Modelle zur Analyse von Fußballresultaten“ (S.V.J.S. 1954) einige Versuche in dieser Richtung. Jede Modellbildung ist von zwei entgegengesetzten Gefahren bedroht: Entweder das Modell ist zu einfach und kann daher die Vorgänge in der Wirklichkeit nicht in allen wesentlichen Zügen wiedergeben, oder das Modell ist so kompliziert, daß man mit ihm nicht mehr operieren kann. Das eben geschilderte Modell ist leider gegen beide Gefahren nicht ganz gesichert: Es setzt einesteils in Form der WD  $f(x, t; \lambda_1, \dots, \lambda_r)$  eine weitgehende räumliche und zeitliche Homogenität für die Vorgänge auf dem Spielfeld voraus, die in Wirklichkeit sicher nicht in dem Ausmaß zutrifft. Andererseits dürfte es bereits schwierig sein, auf der Grundlage der gemachten Voraussetzungen bis zu Signifikanzaussagen über die Rangordnung der Spielstärken durchzudringen. Trotzdem dürfte das geschilderte Modell einige wesentliche Züge weit verbreiteter Mannschaftsspiele richtig wiedergeben und eines weiteren Ausbaues nach der theoretischen und nach der praktischen Seite hin fähig sein.

Für eine kritische Durchsicht dieser Arbeit und einige Verbesserungsvorschläge sei Herrn Professor Dr. L. Schmetterer von der Universität Wien an dieser Stelle bestens gedankt.

(Eingegangen am 12. März 1956)



# Über das Temperaturfeld in längs einer Richtung bewegten und zeitlich veränderlichen Bereichen

Von H. Fieber, Wien

Mit 1 Textabbildung

**Zusammenfassung.** Durch Heranziehung eines geeignet gewählten inhomogenen Problems führt die Lösung der genannten Aufgabe zu einer Volterraschen Integralgleichung 1. Art, die näherungsweise gelöst werden kann.

## I. Einleitung

In dieser Arbeit soll eine Methode entwickelt werden, die es gestattet, ein Problem folgender Art zu lösen:

Von der Ebene  $z = 0$  zur Zeit  $t = 0$  ausgehend, ströme Materie längs der positiven  $z$ -Achse in ein willkürlich begrenztes Gebiet des Raumes (Abb. 1). Besitzt der Materiestrom an  $z = 0$  die Temperatur  $T_0 > T_R$  ( $T_R$  ist die Temperatur des umgebenden Mediums), so bildet sich für  $t > 0$  infolge der Wärmeverhältnisse an Mantel und Stirnfläche im Inneren eine Temperaturverteilung aus<sup>1</sup>. Beispielsweise denke man an den konkreten Fall einer Strangpresse. An der Ausspritzdüse verläßt das Material mit hoher Temperatur im plastischen Zustand die Presse, um sich unter Wärmeabgabe zu verfestigen. Das in diesem ständig wachsenden Körper herrschende Temperaturfeld soll nun ermittelt werden.

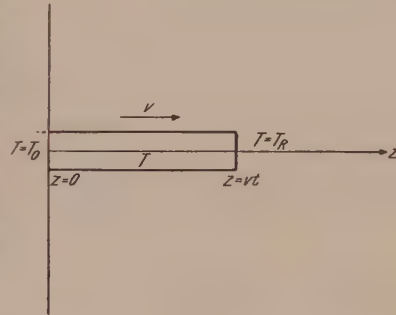


Abb. 1

Die Beantwortung dieser Frage stößt auf ganz erhebliche Schwierigkeiten, weshalb die Lösung nicht direkt, sondern mittels folgender Überlegung gesucht wird. Ersetzt man nämlich den sich dauernd verlängernden Körper (Strang) S I durch einen zweiten S II mit den selben Quersdimensionen, aber von „halbunendlicher“ Länge, so wird dessen Temperatur, die an  $z = 0$  ebenfalls  $T_0$  betrage, im allgemeinen für alle Zeiten  $t$  in allen Punkten von der Temperatur von S I abweichen. Um nun eine Übereinstimmung mit S I zu gewinnen, muß man in S II eine Quellenverteilung mit geeigneter Intensität anbringen. Dies kann man mittels einer Quelle an  $z = vt$  ( $v$  sei die konstante Geschwindigkeit, mit der sich die Stirnfläche von S I verschiebt) erreichen, deren Intensität so bestimmt wird, daß sich gerade jene Temperaturverteilung im Körper einstellt, wie sie durch diejenige von S I gefordert wird.

## II. Formulierung der Probleme

Bedeutet  $a^2$  die Temperaturleitzahl und  $\nabla^2$  den Laplace-Operator, so kann das Problem P I für S I so formuliert werden:

$$T_t = a^2 \nabla^2 T - v T_z \quad (0 < z < vt), \quad (1)$$

mit der Anfangsbedingung  $T = 0$  für  $t = 0$ , da zu dieser Zeit jenes Gebiet, in das der Materiestrom eindringt, noch leer ist und deshalb die umgebende Raumtemperatur aufweist, die o. B. d. A. mit Null angenommen werden kann. Die Randbedingungen bezüglich der  $z$ -Koordinate seien gegeben durch

$$T = T_0 \text{ an } z = 0 \quad \text{und} \quad \alpha T_z + \beta T = 0 \text{ an } z = vt.$$

<sup>1</sup> B. Ljubov: Lösung des instationären eindimensionalen Wärmeleitungsproblems für ein Gebiet mit gleichmäßig bewegter Grenze. Doklady Akad. Nauk. SSSR. 57 (1947).

Hinsichtlich der anderen beiden Koordinaten liege ebenfalls eine Randbedingung 1., 2. oder 3. Art vor, bzw. entsprechende Symmetriebedingungen.

Das Problem P II für S II, welches S I äquivalent sein soll, kann nun geschrieben werden<sup>2</sup>:

$$\Theta_t = a^2 \nabla^2 \Theta - v \Theta_z + q(x_1, x_2, z) \delta(z - vt) \quad (0 < z < \infty) \quad (2)$$

( $\delta(z - vt)$  ist die Dirac-Funktion) mit den gleichen Anfangs- und Randbedingungen wie P I, ausgenommen natürlich jener an  $z = vt$ ; dafür wird ein hinreichend rasches Verschwinden von  $\Theta$  im Unendlichen gefordert. Die Funktion  $q(x_1, x_2, z)$  wird nun so bestimmt, daß die Bedingung

$$\alpha \Theta_z + \beta \Theta = 0 \quad \text{an } z = vt \quad (3)$$

erfüllt ist. Da in dem interessierenden Bereich  $0 < z < vt$  die Differentialgleichungen für  $T$  und  $\Theta$  übereinstimmen, ferner  $\Theta$  die gleichen Randbedingungen wie  $T$  erfüllt, hat dies  $\Theta = T$  zur Folge, was sich leicht nachprüfen läßt. Somit bedeutet die Lösung von P II mit  $q(x_1, x_2, z)$  aus (3) auch die von P I.

### III. Lösung von P II

Der Laplace-Operator lasse sich in der Form schreiben:

$$\nabla^2 = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

wobei  $\Delta_2$  nur auf die beiden restlichen Koordinaten  $x_1, x_2$  wirkt ( $x_3 = z$ ). So ist z. B. in kartesischen Koordinaten

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

in Zylinderkoordinaten

$$\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

und man erhält aus (2)

$$\Theta_t = a^2 \Delta_2 \Theta + a^2 \Theta_{zz} - v \Theta_z + q \delta(z - vt). \quad (4)$$

Mittels endlicher Fourier-Transformationen kann man nun  $x_1$  und  $x_2$  daraus eliminieren. Denn ist  $\varphi_{\lambda, \mu} = \varphi(\lambda x_1, \mu x_2)$  ein Fourier-Kern und bezeichnet abkürzend

$$(u, \varphi_{\lambda, \mu}) = \iint_{\mathfrak{B}} u(x_1, x_2, z; t) \varphi(\lambda x_1, \mu x_2) dx_1 dx_2$$

über den betrachteten Integrationsbereich, so ergibt sich nach Multiplikation von (4) mit  $\varphi_{\lambda, \mu}$  und nachfolgender Integration

$$(\Theta, \varphi_{\lambda, \mu})_t = a^2 (\Delta_2 \Theta, \varphi_{\lambda, \mu}) + a^2 (\Theta, \varphi_{\lambda, \mu})_{zz} - v (\Theta, \varphi_{\lambda, \mu})_z + (q, \varphi_{\lambda, \mu}) \delta(z - vt). \quad (5)$$

Die hierbei durchgeführte Vertauschung von Differentiation und Integration ist erlaubt, da infolge obiger Aufspaltung  $\mathfrak{B}$  zeitunabhängig ist. Um diese Differentialgleichung für  $(\Theta, \varphi_{\lambda, \mu})$  in  $z$  und  $t$  zu lösen wird man fordern:

$$(\Delta_2 \Theta, \varphi_{\lambda, \mu}) = s(\lambda, \mu) (\Theta, \varphi_{\lambda, \mu}).$$

Diese Forderung kann aber sicher dann erfüllt werden, wenn in dem betrachteten Bereich  $\Delta_2$  sich selbstadjungiert ist, das heißt

$$(\Delta_2 \Theta, \varphi_{\lambda, \mu}) - (\Theta, \Delta_2 \varphi_{\lambda, \mu}) = 0. \quad (6)$$

Nach dem Greenschen Satz gilt das aber nur, solange das Integral über die stückweise glatte Randkurve  $I$  von  $\mathfrak{B}$  mit der aus  $\mathfrak{B}$  weisenden Normalen  $n$

$$\int_I \left( \varphi_{\lambda, \mu} \frac{\partial \Theta}{\partial n} - \Theta \frac{\partial \varphi_{\lambda, \mu}}{\partial n} \right) d\sigma = 0. \quad (7)$$

<sup>2</sup> J. N. Sneddon: Fourier-Transforms, 1951.



Da voraussetzungsgemäß  $\Theta$  auf  $\Gamma$  Randbedingungen 1., 2. oder 3. Art erfüllt, kann dieses Integral stets zum Verschwinden gebracht werden, wenn man nur den  $\varphi_{\lambda, \mu}$  längs  $\Gamma$  ebenfalls Bedingungen 1., 2. oder 3. Art in geeigneter Weise auferlegt. Aus der so erzwungenen Selbstadjungiertheit von  $\Delta_2$  und mittels (6) gewinnt man sofort die Bestimmungsgleichung für die  $\varphi_{\lambda, \mu}$

$$(\Theta, \Delta_2 \varphi_{\lambda, \mu}) = s(\lambda, \mu) (\Theta, \varphi_{\lambda, \mu})$$

oder

$$\Delta_2 \varphi_{\lambda, \mu} = s(\lambda, \mu) \varphi_{\lambda, \mu}.$$

Handelt es sich um separable Koordinaten<sup>3</sup>, so kann diese Gleichung in zwei Sturm-Liouvillesche Differentialgleichungen hinsichtlich der Variablen  $x_1$  bzw.  $x_2$  aufgespalten werden mit den bzw. Eigenfunktionen  $\psi_\lambda(x_1)$ ,  $\chi_\mu(x_2)$  und den auf Grund (7) ermittelten Eigenwerten  $\lambda$  bzw.  $\mu$ . Dann ist also der gewünschte Integralkern

$$\varphi_{\lambda, \mu} = \psi_\lambda(x_1) \chi_\mu(x_2)$$

und (5) kann mit  $(\Theta, \varphi_{\lambda, \mu}) = \vartheta$  und  $(q, \varphi_{\lambda, \mu}) = Q$  geschrieben werden

$$\vartheta_t = a^2 \vartheta_{zz} - v \vartheta_z + a^2 s(\lambda, \mu) \vartheta + Q(\lambda, \mu, z) \delta(z - vt).$$

Diese Gleichung wird mittels der Substitution

$$\vartheta = e^{\frac{v}{2a^2}z} u(z, t)$$

auf die Normalform gebracht:

$$u_t = a^2 u_{zz} - A_{\lambda, \mu} u + Q e^{-\frac{v}{2a^2}z} \delta(z - vt) \quad \left( \begin{array}{l} 0 < z < \infty \\ 0 < t < \infty \end{array} \right) \quad (8)^4$$

mit

$$A_{\lambda, \mu} = \frac{v^2}{4a^2} - a^2 s(\lambda, \mu),$$

wobei für  $t = 0$ :  $u = 0$  und an  $z = 0$ :  $u = \vartheta_0$  mit  $\vartheta_0 = (T_0, \varphi_{\lambda, \mu})$  sein möge, während für  $z \rightarrow \infty$  die Funktion  $u$  hinreichend schnell verschwinden soll.

Zerlegt man  $u$  in  $u_1 + u_2$ , wobei  $u_1$  der homogenen Differentialgleichung mit inhomogenen Randbedingungen und  $u_2$  der inhomogenen Gleichung mit homogenen Randbedingungen genügen soll, so erhält man für  $u_1$

$$u_{1|t} = a^2 u_{1|zz} - A_{\lambda, \mu} u_1$$

mit  $u_1 = 0$  für  $t = 0$  und  $u_1 = \vartheta_0$  an  $z = 0$ . Anwendung der Laplace-Transformation  $\mathfrak{L} u_1 = U_1(p)$  führt auf die der Randbedingung angepaßte Lösung der Differentialgleichung für  $U_1$

$$U_1 = \frac{\vartheta_0}{p} \exp \left[ -\frac{z}{a} \sqrt{p + A_{\lambda, \mu}} \right],$$

welche nach Rücktransformation<sup>5</sup> ergibt:

$$u_1(z, t) = \frac{\vartheta_0}{2} \left[ e^{z\sqrt{A_{\lambda, \mu}}} \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{tA_{\lambda, \mu}} \right) + e^{-z\sqrt{A_{\lambda, \mu}}} \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{tA_{\lambda, \mu}} \right) \right]. \quad (9)^6$$

Weiters genügt  $u_2$  der Gleichung

$$u_{2|t} = a^2 u_{2|zz} - A_{\lambda, \mu} u_2 + Q(z) e^{-\frac{v}{2a^2}z} \delta(z - vt)$$

<sup>3</sup> Morse und Feshbach: Methods of Theoretical Physics I, Kap. 5/1. 1953.

<sup>4</sup> In den Differentialgleichungen besteht rein formal kein Unterschied zwischen dem dreidimensionalen und eindimensionalen Körper. Bei letzterem ist  $s = 0$  und  $Q$  nur eine Funktion von  $z$ .

mit  $u_2 = 0$  für  $t = 0$  und  $u_2 = 0$  an  $z = 0$ , die nach Anwendung einer Sinustransformation  $\mathfrak{S} u_2 = U_2(\nu)$  im Intervall  $0 < z < \infty$  in

$$U_2|_t + (a^2 \nu^2 + A_{\lambda, \mu}) U_2 = Q(\nu t) e^{-\frac{\nu^2}{2a^2} t} \sin \nu v t$$

übergeht, deren für  $t = 0$  verschwindende Lösung gegeben ist durch

$$U_2 = \int_0^t Q(\nu \tau) e^{-\frac{\nu^2}{2a^2} \tau} e^{-(a^2 \nu^2 + A_{\lambda, \mu})(t-\tau)} \sin \nu v \tau d\tau.$$

Vertauscht man bei der Rücktransformation der Sinustransformation die Integrationsfolge, so stößt man auf das Integral<sup>5</sup>

$$\int_0^\infty e^{-a^2(t-\tau)^2} \sin \nu v \tau \sin \nu z d\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{t-\tau}} \left[ e^{-\frac{(z-v\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(z+v\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right]$$

und erhält somit

$$u_2(z, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{Q(\nu \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\nu^2}{2a^2} \tau} e^{-A_{\lambda, \mu}(t-\tau)} \left[ e^{-\frac{(z-v\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(z+v\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\tau. \quad (10)$$

Mit (9) und (10) erhält man zunächst im Bildraum der  $\varphi_{\lambda, \mu}$  als Lösung von (8)

$$u(z, t) = \frac{\vartheta_0}{2} \left[ e^{z\sqrt{A_{\lambda, \mu}}} \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{t} A_{\lambda, \mu} \right) + e^{-z\sqrt{A_{\lambda, \mu}}} \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{t} A_{\lambda, \mu} \right) \right] + \\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{Q(\nu \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\nu^2}{2a^2} \tau} e^{-A_{\lambda, \mu}(t-\tau)} \left[ e^{-\frac{(z-v\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(z+v\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\tau,$$

woraus sich wegen der Endlichkeit des Bereiches  $\mathfrak{B}$  sofort durch Rücktransformation

$$\Theta = e^{\frac{v}{2a^2} z} \sum_{\lambda, \mu \geq 0} \frac{1}{N_{\lambda^2} N_{\mu^2}} u(\lambda, \mu, z; t) \varphi(\lambda x_1, \mu x_2)$$

ergibt, wobei  $N_\lambda$  und  $N_\mu$  die Normen der verwendeten Fourier-Transformationen bedeuten.

In (10) ist die Quellstärke  $Q$  noch unbekannt und soll nun den Überlegungen von II. entsprechend durch die Bedingung an der Stirnfläche  $z = vt$  von S I, die im Bildbereich der  $\varphi_{\lambda, \mu}$  für  $u_2(\lambda, \mu, z; t)$  die Gestalt annimmt

$$\alpha u_z + \left( \alpha \frac{v}{2a^2} + \beta \right) u = 0 \quad (11)$$

berechnet werden.

#### IV. Bestimmung von $Q$

Legt man also eine Bedingung der Form. (11) zugrunde, so gelangt man zu einer Volterraschen Integralgleichung 1. Art für  $Q$

$$\int_0^t Q(\nu \tau) K(t, \tau) d\tau = f(t) \quad (12)$$

mit dem Kern

<sup>5</sup> Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi: Tables of Integral-Transforms, Bd. I. 1954.

<sup>6</sup> Hierbei ist  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$  mit  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ .



$$K(t, \tau) = e^{-a^2 s(\lambda, \mu)(t-\tau)} \left[ \frac{\alpha \tau v}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{v^2}{a^2} \frac{t\tau}{t-\tau}} + \frac{a^2 \beta}{t-\tau} \left( 1 - e^{-\frac{v^2}{a^2} \frac{t\tau}{t-\tau}} \right) \right] \quad (13)$$

und

$$\begin{aligned} f(t) = \vartheta_0 a^2 \sqrt{\pi} \left\{ \left[ \alpha \sqrt{A_{\lambda, \mu}} - \frac{\alpha v}{2a} - a\beta \right] e^{\left( \frac{v^2}{2a^2} - \frac{\sqrt{A_{\lambda, \mu}}}{a} v \right) t} \operatorname{erfc} \left[ \left( \frac{v}{2a} - \sqrt{A_{\lambda, \mu}} \right) \sqrt{t} \right] - \right. \\ \left. - \left[ \alpha \sqrt{A_{\lambda, \mu}} + \frac{\alpha v}{2a} + a\beta \right] e^{\left( \frac{v^2}{2a^2} + \frac{\sqrt{A_{\lambda, \mu}}}{a} v \right) t} \operatorname{erfc} \left[ \left( \frac{v}{2a} + \sqrt{A_{\lambda, \mu}} \right) \sqrt{t} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\sqrt{t}} e^{-\left( A_{\lambda, \mu} - \frac{v^2}{4a^2} \right) t} \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Es empfiehlt sich, die Lösung in folgender Weise anzunähern: Man setze  $Q$  als Treppenfunktion von  $t$  an, das heißt also, im Intervall von  $t_{i-1}$  bis  $t_i$  besitze  $Q$  den konstanten Wert  $Q_i$  und es ist plausibel, daß man bei hinreichend kleinen Intervalllängen die Quellverteilung mit gewünschter Genauigkeit angeben kann. Setzt man  $t_0 = 0$ ,  $t_n = t$  und

$$K_i(t) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, \tau) d\tau,$$

so kann die Integralgleichung (12) approximiert werden durch

$$\sum_{i=1}^n Q_i K_i(t) = f(t).$$

Um hieraus die  $Q_i$  zu berechnen, ordnet man  $t$  speziell der Reihe nach die Werte  $t_1, t_2, \dots$  zu, deren Abstände durch die praktischen Anforderungen bestimmt sind und gewinnt dadurch das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n Q_i K_i^{(n)} = f_n, \quad (15)$$

wenn man  $K_i(t_n) = K_i^{(n)}$  und  $f(t_n) = f_n$  setzt, woraus man die gesuchten  $Q_i$  bestimmen kann. So folgt mit

$$g_v^{(n)} = \frac{K_{n-v}^{(n)}}{K_n^{(n)}} - \sum_{\mu=1}^{v-1} \frac{K_{n-v}^{(n-\mu)}}{K_{n-\mu}^{(n-\mu)}} g_{\mu}^{(n)}$$

für die  $Q_n$

$$Q_n = \frac{f_n}{K_n^{(n)}} - \sum_{v=1}^{n-1} \frac{f_{n-v}}{K_{n-v}^{(n-v)}} g_v^{(n)}. \quad (16)$$

Da der integrable Kern  $K(t, \tau)$  entsprechend (13) beständig positiv ist, also  $K_i^{(i)} > 0$ , gilt (16) für jedes  $n$ . Die bereits aus der Problemstellung zu erwartende Singularität für  $t = 0$  läßt sich aus der ersten Gleichung von (15) diskutieren. Demnach strebt der Mittelwert der Quellstärke im Intervall von 0 bis  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  wie  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  nach unendlich, womit die Konvergenz von (11) gesichert ist. Kennt man die Quellverteilung, so kann man  $u_2$  nach (11) berechnen und erhält durch Addition von  $u_1$  die gesuchte Temperatur<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> Diese Methode kann auch bei nicht konstanten Geschwindigkeiten  $v$  angewendet werden. Vgl. etwa F. Selig: Bemerkungen zum Stefanschen Problem. Österr. Ingenieur-Arch., dieses Heft.

Schließlich kann noch untersucht werden, unter welchen Bedingungen sich die Lösung des P I von der Temperaturverteilung in einem unendlich langen bewegten Körper ohne korrigierende Wärmequellen im Rahmen der praktisch bedeutsamen Genauigkeit nicht unterscheidet. Dies erfordert die Angabe jener Zeit  $t^*$  für die  $|Q(t)| < \varepsilon$  mit  $t > t^*$ .

(Eingegangen am 7. März 1956)

## Über Oberflächeneffekte beim elektrischen Durchbruch von Flüssigkeiten

Von W. F. Gauster

**Zusammenfassung.** Neuere Arbeiten über den elektrischen Durchbruch von Flüssigkeiten ergeben folgendes Bild: Verlässliche quantitative Ergebnisse betreffend die Durchschlagsfestigkeit technischer Flüssigkeiten können nur erwartet werden, wenn Serien von mindestens einigen hundert gleichartigen Messungen statistisch ausgewertet werden. Derartige Versuche, ausgeführt mit Rogowski-Elektroden, ergeben einen einfachen Zusammenhang zwischen wahrscheinlicher Wechselspannungs-Durchbruchfeldstärke, Größe der Elektrodenfläche und Standarddeviation. Stoßfestigkeitsbestimmungen von Kohlenwasserstoffen und Leitfähigkeitsmessungen von Hexan zeigen auch bei reinsten Flüssigkeiten die ausschlaggebende Bedeutung von Oberflächeneffekten.

Im folgenden wird über neuere Arbeiten, die sich auf den elektrischen Durchbruch technischer Flüssigkeiten (vor allem Transformatorenöl) und reinsten Flüssigkeiten (Kohlenwasserstoffe) beziehen, kurz berichtet. Dieses Gebiet ist auf einer breiteren Grundlage von physikalischen Experimenten und mathematischen Erkenntnissen aufgebaut, und es ist beabsichtigt, an anderer Stelle eine erschöpfendere Darstellung folgen zu lassen. Die nachstehenden Ausführungen bezwecken nur, einen ganz kurz gefaßten Überblick zu geben, der durch Anmerkungen und Literaturhinweise ergänzt ist, wobei vor allem die derzeit vielleicht noch weniger bekannten amerikanischen Veröffentlichungen berücksichtigt sind.

### I. Der elektrische Durchbruch technischer Flüssigkeiten

#### A. Versuchsserien in statistischer Behandlung

Bei der großen Streuung der Durchbruchswerte technischer Flüssigkeiten hat man schon vor längerer Zeit erkannt, daß jeweils Serien von Messungen durchgeführt werden müssen, die einer statistischen Behandlung zu unterziehen sind<sup>1</sup>. Zunächst hielt man es wohl für selbstverständlich, daß dies unter Benützung der Gaußschen Verteilungsfunktion zu geschehen hätte<sup>2</sup>. Beim Bestreben, reproduzierbare Resultate zu erhalten, machte sich öfters ein „Formierungs“-Prozeß störend bemerkbar, der hauptsächlich die Elektroden, zum Teil auch die Flüssigkeit betrifft<sup>3</sup>. Die Erscheinung besteht darin, daß während der ersten 100 oder mehr Entladungen die gemessene Durchbruchfeldstärke sehr merkbar steigt<sup>4</sup>. Man fand jedoch, daß auch bei Flüssigkeiten, die nur mit technischen Mitteln sorgfältig gereinigt wurden, die also noch nicht als „reinste“ Flüssigkeiten zu bezeichnen sind, und bei reinen Elektroden<sup>5</sup> und Meßgefäßen diese Erscheinung vermieden werden kann. Für Serierendurchbruchversuche

<sup>1</sup> J. L. R. Hayden und W. N. Eddy: Trans. Amer. Inst. Electr. Engr. **41**, 102, 394 (1922).

<sup>2</sup> J. Rebhan: Elektrotechn. Z. **53**, 556 (1932).

<sup>3</sup> W. Ferrant: Z. Physik **89**, 317 (1934).

<sup>4</sup> F. Koppelman: Z. techn. Physik **16**, 125 (1935). Ähnliche Erscheinungen sind auch bei Gasentladungen unter hohen Drücken wohl bekannt, siehe z. B.: J. G. Trump, R. W. Cloud, J. G. Mann und E. P. Hanson: Electr. Engng. **69**, 961 (1950).

<sup>5</sup> Über den Einfluß der Entgasung der Elektroden siehe J. L. Maksiejewski und H. Tropper: Proc. Inst. Electr. Engrs., Teil II, **101**, 183 (1954).



mit Wechsellspannungen sind vollautomatisch arbeitende Versuchseinrichtungen mit Erfolg verwendet worden<sup>6</sup>. Als einer der ersten hat Weibull<sup>7</sup> darauf hingewiesen, daß die zu erwartende statistische Verteilungsfunktion von der Gaußschen verschieden wäre und er schlug andere, unsymmetrische Typen der Verteilungsfunktion vor.

## B. Die Modellvorstellung der ungeordnet verteilten schwachen Stellen und die Statistik der extremen Werte

Auf dem Gebiete der mechanischen Festigkeit bediente man sich schon lange der Modellvorstellung eines Körpers, der aus einem in reinem Zustand sehr festen Material besteht, welches durch ungeordnet verteilte kleinste Risse („flaws“) geschwächt ist<sup>8</sup>. Milnor<sup>9</sup> dürfte zum erstenmal eine ähnliche Vorstellung auf den elektrischen Durchschlag dünner Schichten angewandt haben. Diesbezügliche mehr oder weniger glückliche mathematische Ableitungen, die unabhängig voneinander durchgeführt wurden, finden sich an verschiedenen Stellen<sup>10</sup>. Es war eine glückliche Fügung, daß in der mathematischen Statistik eine „Theorie der extremen Werte“ entwickelt wurde<sup>11</sup>, die, wie sich bald zeigte, mit Vorteil auf Probleme der mechanischen und elektrischen Festigkeit angewendet werden kann<sup>12</sup>. Die Theorie löst die Aufgabe, die Verteilungsfunktion der höchsten oder niedrigsten Werte (letzteres kommt für die hier besprochenen Probleme in Betracht) aus Gruppen von  $n$  willkürlich herausgegriffenen Werten zu bestimmen, wenn die Verteilungsfunktion der ursprünglich zugrunde gelegten „Bevölkerung“ bekannt ist<sup>13</sup>. Die Theorie der extremen Werte baute Gumbel<sup>14</sup> weiter aus und zeigte die Anwendung an vielen Beispielen (jährlich auftretende extreme meteorologische Daten, Festigkeitsprobleme usw.).

## C. Theorie des äquivalenten Volumens

Es ist naheliegend anzunehmen, daß für den Durchschlag von technischen Flüssigkeiten die räumliche Verteilung von „schwachen Stellen“ (Fasern, Gasbläschen usw.) von Bedeutung ist. Tatsächlich liegt ein bemerkenswerter Versuch vor, Formeln für den Wechsellspannungsdurchschlag von Transformatorenöl für beliebige Elektrodengeometrien aus Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen abzuleiten, die sich auf das unter elektrischer Beanspruchung befindliche Volumen beziehen. W. R. Wilson<sup>15</sup> setzt voraus, daß jene Volumsteile für den Durchschlag in Betracht kommen, in welchen der absolute Betrag der elektrischen Feldstärke zumindest etwa 90 % des höchsten auftretenden Spannungsgradienten ist („äquivalentes Volumen  $V_e$ “). Ferner stützt er sich auf eine Beobachtung von Peek<sup>16</sup>, wonach die Durchbruchfeldstärke einer Kugelfunktenstrecke unter Öl in einem größeren Bereich nur von dem Kugelradius, nicht aber vom Elektrodenabstand abhängig ist. Damit läßt sich für diesen besonderen

<sup>6</sup> H. H. Race: Trans. Amer. Inst. Electr. Engr. **59**, 730 (1940).

<sup>7</sup> W. Weibull: Ing. Vetenskap, Akad. Handl. 151, 153 (Stockholm 1939).

<sup>8</sup> A. A. Griffith: Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **221**, 163 (1920). — J. I. Frenkel und T. A. Kontorova: J. Phys. USSR **7**, 108 (1943).

<sup>9</sup> J. W. Milnor: Diskussion zu Ref. <sup>10</sup>, Trans. Amer. Inst. Electr. Engr. **32**, 2128 (1913).

<sup>10</sup> Die erste Anwendung dieser Modellvorstellung, und zwar auf mechanische Zugfestigkeit, wurde bereits im Jahre 1880 durchgeführt, siehe J. Lieblein: Biometrika **41**, 559 (1954). Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß die Voraussetzungen der Modellvorstellung oft nicht erfüllt sind, siehe Report Armor Res. Found., Projekt 90-1081 J, Final Report 1952.

<sup>11</sup> L. H. C. Tippett: Biometrika **17**, 364 (1925).

<sup>12</sup> B. Epstein: J. Appl. Physics **19**, 140 (1948).

<sup>13</sup> H. Cramér: Mathematical methods of statistics. Princeton Univ. Press. N. J. 1946.

<sup>14</sup> J. Gumbel: Nat. Bureau of Standards, Appl. Math. Ser. No 33 (1954).

<sup>15</sup> W. R. Wilson: Trans. Amer. Inst. Electr. Engr. **72**, III, 68 (1953).

<sup>16</sup> F. W. Peek Jr.: Dielectric Phenomena in High Voltage Engineering, 3. Aufl. New York: McGraw-Hill Book Comp. Inc. 1929.

Fall ein Zusammenhang zwischen dem definierten äquivalenten Volumen  $V_e$  und der Durchbruchfeldstärke  $E$  herstellen, der von Wilson als für jede Elektrodengeometrie gültig angesehen wird:

$$E = f(V_e). \quad (1)$$

Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtung ergibt einen Zusammenhang zwischen equivalentem Volumen und der bei den betreffenden Versuchen zu erwartenden Standarddeviation:

$$s = F(V_e). \quad (2)$$

Beide Funktionen von  $V_e$  sind monoton fallend. Dem größeren äquivalenten Volumen entsprechen nach Wilson geringere Durchbruchfeldstärke und Standarddeviation. Selbstverständlich hängen diese funktionalen Beziehungen von der Zusammensetzung und den Verunreinigungen der Flüssigkeit, dem Zustand der Elektroden und der Art der Versuchsdurchführung (Geschwindigkeit der Spannungssteigerung, Ruhepause zwischen den Entladungen usw.) ab.

Es konnte gezeigt werden<sup>17</sup>, daß sich Wilsons Theorie durch einfache Gleichungen ausdrücken läßt, die zwei Konstanten enthalten, die jeweils den erwähnten besonderen Material- und Versuchsbedingungen angepaßt werden können. Qualitativ scheint die Aussage, daß dem größeren kritischen Volumen eine geringere Durchbruchfeldstärke entspricht, richtig zu sein. Gl. (1) liefert aber im allgemeinen nicht die gewünschten numerischen elektrischen Festigkeitswerte. Auch die nach Gl. (2) errechneten Beträge der Standarddeviation der Durchschlagsspannungen stehen zu den Versuchsergebnissen im Widerspruch<sup>18</sup>.

#### D. Oberflächeneffekte beim elektrischen Durchbruch dünner Schichten fester Isolierstoffe und technischer Flüssigkeiten

Im Jahre 1913 veröffentlichte F. M. Farmer eine grundlegende Arbeit über die elektrische Festigkeit dünner isolierender Schichten<sup>19</sup>. Er untersuchte mit Wechselspannungen den Durchschlag von imprägniertem Isolierleinen, Papier, dünnen Hartgummischichten und Transformatorenöl. Dabei wurden Paare von flachen, kreisförmigen Elektroden mit abgerundeten Kanten benützt. Farmer fand, daß die Durchschlagsfestigkeit von imprägniertem Leinen und Papier bei einem Elektrodendurchmesser von 0.39 mm ungefähr 50 % höher als bei einem Durchmesser von 38 cm war, während das entsprechende Verhältnis an dünnen Ölschichten gemessen etwa 10 : 1 betrug.

Im Anschluß an Farmers experimentelle Arbeit wurde von J. W. Milnor eine zugehörige mathematische Theorie entwickelt<sup>9</sup>. Er nimmt an, daß man jede der beiden Elektrodenoberflächen in sehr viele Elemente zerlegen könne, die verschiedenen Durchbruchfeldstärken des dazwischen befindlichen Isolierstoffes entsprechen und daß der Durchschlag an der schwächsten Stelle stattfindet. Er setzt voraus, daß die Verteilung der Durchbruchfeldstärken der Oberflächenelemente durch die

<sup>17</sup> W. F. Gauster: Amer. Inst. Electr. Engr., Comm. and Electronics No 19, 301 (1955).

<sup>18</sup> Für den Fall von Rogowski-Elektroden folgt aus der „Theorie des äquivalenten Volumens“ (siehe Ref. 17, Gl. 28) für die Durchbruchfeldstärke

$$E = A + \frac{B/\sqrt{1.35}}{\sqrt[6]{\pi \delta} \sqrt[3]{R}}, \quad \text{somit } E_1 - E_2 = \frac{B/\sqrt{1.35}}{\sqrt[6]{\pi \delta}} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{R_1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{R_2}} \right).$$

Ferner müßte die Standarddeviation von  $R$  abhängen. Beides weicht von den Versuchen von Weber und Endicott (siehe Ref. 22) um Beträge ab, die wesentlich größer als die Versuchungenauigkeiten sind.

<sup>19</sup> F. M. Farmer: Trans. Amer. Inst. Electr. Engr. 32, 2097 (1913).



Gaußsche Verteilungsfunktion dargestellt werden kann. Er leitet daraus für die resultierende Durchbruchfeldstärke bei einer Elektrodenfläche  $A$  die Beziehung

$$E = C_1 - C_2 \log_{10} A \quad (3)$$

ab. Milnor zeigt schließlich an einem numerischen Beispiel, daß bei passender Wahl der Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  die von Farmer experimentell gefundene Abhängigkeit der Durchschlagsspannung von der Elektrodenfläche durch Gl. (1) in befriedigender Weise dargestellt werden kann.

V. Bush und P. H. Moon<sup>20</sup> entwickelten eine vollautomatische Einrichtung zur Bestimmung der Durchschlagsfestigkeit von Kondensatorpapier mit Gleichspannung. Insgesamt wurden 100 000 Messungen ausgewertet, von denen sich etwa 9000 auf die Untersuchung des Einflusses der Elektrodenfläche bezogen. Gl. (3) konnte bestätigt werden, jedoch machte sich auch bei dieser Art von Versuchen der früher erwähnte „Formierungsprozeß“ störend bemerkbar.

Später wurde von Epstein und Brooks<sup>21</sup> die Durchschlagsfestigkeit von Papierkondensatoren untersucht. Zur Auswertung dieser Versuche wurde die neu entwickelte statistische Theorie der extremen Werte verwendet. Das erwartete Vorliegen einer unsymmetrischen Verteilungsfunktion wurde bestätigt und es zeigt sich auch hier eine einfache Abhängigkeit von der Größe der Oberfläche [vgl. Gl. (5)].

Neuestens führten Weber und Endicott<sup>22</sup> sehr sorgfältige Versuche durch, die einwandfrei zeigten, daß der früher erwähnte Oberflächeneffekt auch für den Wechselstromdurchschlag in technischen Flüssigkeiten gilt. Es dürfte hier der erste Fall vorliegen, daß eine große Zahl von Meßwerten, die mittels einer unter wohlkontrollierten Bedingungen vollautomatisch arbeitenden Versuchseinrichtung erhalten wurden, nach modernen statistischen Methoden ausgewertet worden sind. Aus 1600 Einzelmessungen wurden folgende Ergebnisse abgeleitet:

a) Die Verteilungsfunktion  $f(x)$  der Durchschlagswerte ist unsymmetrisch.

Sie läßt sich durch die von Gumbel<sup>14</sup> verwendete Verteilungsfunktion:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{dF(x)}{dx} = \alpha e^{-ye^{-y}}, \\ F(x) &= e^{-e^{-y}}, \\ y &= \alpha(x - u) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

darstellen, wobei  $u$  den wahrscheinlichsten Wert der Durchbruchfeldstärke  $x$  bedeutet.

b) Bei konstant gehaltenem Elektrodenabstand ist die Standarddeviation unabhängig von der Elektrodenfläche. Auf Grund der von Gumbel entwickelten Theorie der extremen Werte<sup>23</sup> läßt sich ein geometrischer Oberflächeneffekt wie folgt voraussagen:

$$u_1 - u_2 = 1.8 s \log_{10} \frac{A_2}{A_1}. \quad (5)$$

Diese Beziehung wurde durch die Versuche vollauf bestätigt. Sie ähnelt Gl. (3), besonders wenn man diese in die Form

$$E_1 - E_2 = C_2 \log_{10} \frac{A_2}{A_1} \quad (3a)$$

<sup>20</sup> V. Bush und P. H. Moon: Trans. Amer. Inst. Electr. Engr. **46**, 1025 (1927).

<sup>21</sup> B. Epstein und H. Brooks: J. Appl. Physics **19**, 544 (1948).

<sup>22</sup> K. H. Weber und H. S. Endicott: Amer. Inst. Electr. Engr. paper 56—139 (1956), für Veröffentlichung in Comm. and Electronics angenommen.

<sup>23</sup> Siehe Ref. <sup>14</sup>, Gl. 3.8, S. 19.

bringt. Unterschiedlich ist jedoch, daß in Gl. (5) die Differenz der wahrscheinlichsten Werte  $u$ , in Gl. (3a) die der arithmetischen Mittelwerte  $E$  auftritt. Überdies ist bemerkenswert, daß Gl. (5) keinen freien Zahlenwert enthält, der an die Versuchswerte angepaßt werden kann, da sich die Standarddeviation  $s$  aus den Einzelmessungen eindeutig ergibt. Hierdurch gewinnt die experimentelle Bestätigung der Gl. (5) besonderes Interesse<sup>24</sup>.

## II. Der elektrische Durchbruch reiner Flüssigkeiten

### A. Versuchsergebnisse mit Kugelfunkenstrecken

Schon vor mehr als 20 Jahren war es vereinzelt gelungen, Durchbruchfeldstärken von über  $10^6$  Volt/cm mit reinsten Flüssigkeiten zu erzielen<sup>25</sup>, jedoch wurde die Versuchstechnik erst durch Salvage<sup>26</sup>, Edwards<sup>27</sup> und Goodwin und MacFayden<sup>28</sup> so weit vervollkommen, daß gut reproduzierbare Resultate erhalten wurden. Eine Gruppe von Forschern (Sharbaugh, Crowe, Bragg und andere) führten in den letzten Jahren sehr eingehende Versuche mit Kohlenwasserstoffen durch. Sie untersuchten die elektrische Stoßfestigkeit mit Rechteckswellen von 0.2 bis 10 Mikrosekunden Dauer bei Elektrodenabständen zwischen 0.5 und 10 Mil (1 Mil =  $\frac{1}{1000}$  Zoll = 0.0254 mm)<sup>29</sup>. Polierte Stahlelektroden von 1 Zoll Durchmesser ergaben für reinstes n-Hexan bei 2 Mil Schlagweite und 1.4 Mikrosekunden Stoßdauer eine Durchbruchfeldstärke von  $1.55 \times 10^6$  Volt/cm. 52 Versuche zeigten bei einer Standarddeviation von 2.8 % eine für diese Art von Messungen ausgezeichnete Reproduzierbarkeit. Es konnte eine einfache zahlenmäßige Beziehung zwischen der Durchbruchfeldstärke und dem Molekularaufbau verschiedener Kohlenwasserstoffe hergestellt werden<sup>30</sup>. Bei kugelförmigen Elektroden steigt die Stoßfestigkeit bei Verringerung des Elektrodenabstandes<sup>31</sup>. Beträgt die Stoßdauer mehr als etwa 1 Mikrosekunde, so ist die Durchbruchfeldstärke von ihr in einem weiteren Bereich unabhängig, und zwar erwies sich diese Eigenschaft von der Dichte und Viskosität der untersuchten Kohlenwasserstoffe als unabhängig<sup>32</sup>, was als Beweis dafür angesehen wird, daß die früher vermutete Abhängigkeit der elektrischen Festigkeit reiner Flüssigkeiten von der Ionenbeweglichkeit<sup>28</sup> nicht besteht.

### B. Verschiedene elektrische Festigkeitswerte gemessen mit Rogowski- und Kugelelektroden

Neuestens wurden von Sharbaugh, Cox, Crowe und Auer mit Rogowski-Elektroden aus mechanisch poliertem Stahl Versuche über die elektrische Stoßfestig-

<sup>24</sup> Webers und Endicotts Meßwerte für Rogowski-Elektroden mit verschiedenen Durchmesser liegen für jede der verwendeten Elektrodenflächen, wenn sie auf „Extreme Value Probability Paper“ (siehe Ref. <sup>14</sup>) aufgetragen werden, nahezu auf je einer Geraden, die untereinander parallel sind. Die  $\psi^2$ -Probe (siehe Ref. <sup>13</sup>) rechtfertigt die Annahme der Verteilungsfunktion Gl. (4). Auf Wahrscheinlichkeitspapier für die Gaußsche Verteilungsfunktion würde man keine Geraden erhalten. Ältere Versuchsauswertungen haben nicht nach den jetzt verfügbaren Methoden der Statistik untersucht, ob die Annahme einer bestimmten Verteilungsfunktion berechtigt war.

<sup>25</sup> W. Bähre: Arch. Elektrotechn. **31**, 141 (1937).

<sup>26</sup> B. Salvage: Proc. Inst. Electr. Engr. **98**, 227 (1951).

<sup>27</sup> W. D. Edwards: J. Chem. Physics **20**, 753 (1952).

<sup>28</sup> D. W. Goodwin und K. A. MacFayden: Proc. Phys. Soc. **66 B II**, 85 (1953).

<sup>29</sup> R. W. Crowe, A. H. Sharbaugh und J. K. Bragg: J. Appl. Physics **25**, 1480 (1954).

<sup>30</sup> A. H. Sharbaugh, R. W. Crowe und E. B. Cox: Ann. Rep. Conf. on El. Insul. (Nat. Acad. of Sci.) **22** (1954).

<sup>31</sup> A. H. Sharbaugh, J. K. Bragg und R. W. Crowe: Ann. Rep. Conf. on El. Insul. (Nat. Acad. of Sci.) **16** (1953).

<sup>32</sup> R. W. Crowe: Ann. Rep. Conf. on El. Insul. (Nat. Acad. of Sci.) **26** (1954).



keit von reinstem Hexan angestellt<sup>33</sup>. Bei überkritischer Stoßdauer ergaben sich folgende Resultate:

a) Die Durchbruchfeldstärke beträgt für  $\frac{1}{2}$  Zoll (= 12.7 mm) Elektroden Durchmesser (ebener Kreisdurchmesser) bei Schlagweiten zwischen 1.5 und 4 Mils nur zwischen  $0.890$  bis  $0.935 \times 10^6$  Volt/cm, also bedeutend weniger als im Kugelfeld und ist in diesem Bereich vom Elektrodenabstand fast unabhängig.

b) Unter Verwendung von Rogowski-Elektroden mit Durchmessern von 1.5, 1.0, 0.75 und 0.50 Zoll und einer konstanten Schlagweite von einigen Mils ergeben sich Festigkeitswerte von 0.74 bis  $0.92 \times 10^6$  Volt/cm, die sich durch die von Weber und Endicott zunächst für technische Flüssigkeiten aufgestellte Formel (5) für den geometrischen Oberflächeneffekt sehr gut darstellen lassen.

c) Mit kugelförmigen Elektroden von 1 Zoll Durchmesser wurden bei Abständen von 4, 1.5 und 0.5 Mils Durchschlagsfeldstärken von 1.5, 1.65 und  $2.25 \times 10^6$  Volt/cm gemessen. Diese Werte sind wesentlich höher als die mit Rogowski-Elektroden gefundenen und es ist auch das bekannte Ansteigen der elektrischen Festigkeit mit kleineren Schlagweiten deutlich erkennbar.

d) Es besteht eine durchaus bemerkbare Abhängigkeit vom Durchmesser der Kugelelektroden<sup>34</sup>. Bei 2.5 Mils Elektrodenabstand und für Kugeldurchmesser von 3.0, 1.0, 0.5 und 0.25 Zoll sind die Durchschlagsfeldstärken 1.48, 1.56, 1.65 und  $1.81 \times 10^6$  Volt/cm.

### C. Geometrischer Oberflächeneffekt beim Stoßdurchschlag zwischen Kugelelektroden

Die Abhängigkeit der Durchbruchfeldstärke von der Schlagweite  $\delta$  und von dem Halbmesser  $R$  der kugelförmigen Elektroden läßt sich bemerkenswerterweise in einer einzigen funktionellen Beziehung

$$E = f(\delta R) \quad (6)$$

zusammenfassen. Sie gilt in dem beobachteten Bereich von etwa 0.5 bis 4 Mil  $\times$  Zoll mit einer Genauigkeit von wenigen Prozenten. Nur bei Schlagweiten kleiner als 1.5 Mil steigt die Durchbruchfestigkeit stärker als nach Gl. (6).

Gl. (6) kann in folgender Weise gedeutet werden: Zunächst sei angenommen, daß für den Durchschlag jener Teil der Kugeloberfläche maßgebend ist, für den die an der Oberfläche gemessene Feldstärke mindestens den Wert  $k E_m$  besitzt. Dabei bedeuten  $E_m$  die maximale Feldstärke auf der Kugeloberfläche und  $k$  einen Faktor kleiner als Eins. Die so definierte „kritische Oberfläche“  $A$  ist in guter Annäherung, wie leicht gezeigt werden kann, durch

$$A = \frac{1-k}{k} \pi \delta R \quad (7)$$

bestimmt. Das heißt aber nach Gl. (6), daß in dem angegebenen Bereich die Durchbruchfeldstärke als Funktion der Größe der kritischen Oberfläche dargestellt werden kann. Weitere Versuche auf diesem Gebiet sind von großem Interesse.

Die Versuche von Sharbaugh und seinen Mitarbeitern scheinen zu ergeben, daß es auch bei einem Verhältnis der Schlagweite zum Durchmesser der kugelförmigen Elektroden von etwa 1 : 500 nicht möglich ist, die Durchbrucherscheinungen unter dem Begriff des Durchschlages im homogenen Feld zu erklären. Damit zeigt sich die

<sup>33</sup> A. H. Sharbaugh, E. B. Cox, R. W. Crowe und P. L. Auer: Amer. Inst. Electr. Engr. paper 56—406 (1956), für Veröffentlichung in Comm. and Electronics angenommen.

<sup>34</sup> Aus den in Ref. <sup>5</sup> erwähnten Versuchen, die mit Gleichspannung durchgeführt wurden, ergibt sich keine Abhängigkeit vom Kugeldurchmesser,

Unmöglichkeit, die Abhängigkeit der elektrischen Festigkeit von der Schlagweite durch Stoßionisierung allein zu erklären<sup>35</sup>.

#### D. Physikalische Ursachen des Oberflächeneffektes

Die Arbeiten A. von Hippels und seiner Mitarbeiter haben wesentlich zur Klärung der physikalischen Vorgänge in reinen Flüssigkeiten beigetragen<sup>36</sup>. Von Hippel wies vor allem darauf hin, daß in festen Körpern und Flüssigkeiten der „Elektronen-Bremsmechanismus“ andersartig als in Gasen ist<sup>37</sup>. Während in letzteren den Elektronen, bevor sie die zur Ionisierung nötige Energie erreichen, Energie durch Anregung von Atomen und Molekülen entzogen wird (Lichtemission und andere Sekundärprozesse), findet in festen Körpern und Flüssigkeiten ein Energieentzug dadurch statt, daß die Elektronen durch unelastische Stöße Schwingungen der Moleküle anregen. Paschens Gesetz, wonach bei Gasen die Durchbruchsspannung eine Funktion des Produktes aus Dichte und Elektrodenabstand ist, verliert bei hohen Drücken seine Gültigkeit. Der erhebliche Unterschied in der Durchbruchsspannung von Gasen niedriger Drücke ohne und mit Ultraviolettbestrahlung verschwindet, hingegen macht sich bei höheren Drücken der Einfluß des Kathodenmaterials immer stärker bemerkbar. A. von Hippels Mitarbeiter Young konnte aber durch Experimente nachweisen, daß der Übergang der Durchbruchfeldstärke von CO<sub>2</sub> von niedrigen Drücken über den kritischen Punkt bis zum flüssigen Zustand stetig erfolgt<sup>38</sup>.

Zur weiteren Klärung der physikalischen Vorgänge, die dem elektrischen Durchbruch von Flüssigkeiten zugrunde liegen, untersuchte W. B. Green, ein anderer Mitarbeiter A. von Hippels, die Leitfähigkeit und die Durchbruchfeldstärke von höchstgereinigtem Hexan<sup>39</sup>. Ebenso wie bei Youngs Arbeiten wurde Gleichspannung verwendet. Mit einer Kugel-Platte-Anordnung wurden gut reproduzierbare Werte des Leitungsstromes in Abhängigkeit von Elektrodenmaterial und Elektrodenabstand bis zum Erreichen des Durchschlages erhalten.

Green faßt die Ergebnisse seiner Versuche wie folgt zusammen: Wenn die Spannung von Null aus gesteigert wird, sammeln sich positive Ionen an der Kathode und erzeugen so ein starkes lokales Feld innerhalb der dünnen Oberflächenschicht. Diese hohe Feldstärke verursacht Elektronenemission aus der Kathode, und für irgendeine angelegte Spannung ergibt sich ein Gleichgewichtszustand zwischen der Lieferung von Ionen aus der Flüssigkeit und der Neutralisierung derselben durch die vom Metall emittierten Elektronen. Dieser Gleichgewichtszustand hängt von der Leitfähigkeit, Gleichmäßigkeit und Dicke der Oberflächenschicht ab. Wenn die angelegte Spannung gesteigert wird, erhöht sich gleichzeitig die Zahl der die Kathode erreichenden Ionen und mit ihr die der emittierten Elektronen. Die Stromspannungskurve konnte bis zu einer Feldstärke von 1045 kV/cm gemessen werden. Bei 1060 kV/cm schwankte zunächst die Stromstärke beträchtlich und es erfolgte dann regelmäßig ein Funken-durchschlag. Über 800 kV/cm zeigt sich ein Anwachsen des Stromes, welches auf einen  $\alpha$ -Prozeß schließen lassen könnte. Falls es sich tatsächlich um Stoßionisation handelt, so hat der Faktor  $e^{\alpha d}$  unmittelbar vor dem Durchbruch höchstens den Wert 2. Auch bei den hier in Rede stehenden Flüssigkeitsentladungen ist anzunehmen, daß der Durchbruch dann erfolgt, wenn schließlich die Feldverzerrung durch die gebildeten Ionen groß genug geworden ist.

<sup>35</sup> A. H. Sharbaugh, J. K. Bragg und R. W. Crowe: J. Appl. Physics **26**, 434 (1955).

<sup>36</sup> A. R. von Hippel und 22 Mitarbeiter: Dielectric Materials and Applications. New York: John Wiley and Sons, 1954. — A. R. von Hippel: Dielectrics and Waves. New York: John Wiley and Sons, 1954.

<sup>37</sup> A. R. von Hippel: J. Appl. Physics **8**, 815 (1937).

<sup>38</sup> D. R. Young: J. Appl. Physics **21**, 222 (1950).

<sup>39</sup> W. B. Green: Techn. Rep. 39, Lab. for Ins. Research, MIT (1955).



Die älteren Vorstellungen über Stoßionisierung in Flüssigkeiten müssen nach Greens Versuchen einer grundsätzlichen Revision unterzogen werden. Vergleicht man die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  bei gleicher Feldstärke aber bei verschiedenen Elektrodenabständen  $d_1$  und  $d_2$ , so wäre auf Grund einer Stoßionisierung in der Flüssigkeit ein Verhältnis  $I_1 : I_2 = e^{\alpha(d_1 - d_2)} = \text{konst.}$ , unabhängig vom Kathodenmaterial, zu erwarten. Tatsächlich ist dieses Verhältnis für Elektroden aus Stahl am größten, für Gold wesentlich kleiner und für Kupfer praktisch gleich Null. Überdies ergab sich für Kupferelektroden in einem weiten Bereich der Feldstärke nur ein verschwindend kleines Ansteigen des Stromes bei Erhöhung der angelegten Spannung. Greens Arbeit zeigt jedenfalls die ausschlaggebende Bedeutung von Oberflächeneffekten beim Stromdurchgang in reinen Flüssigkeiten, gegen welche die Rolle der Stoßionisierung in den Hintergrund tritt.

(Eingegangen am 26. März 1956)

## Elektronische Abbildung als Eigenwertproblem

Von Walter Glaser, Wien<sup>1</sup>

**Zusammenfassung.** In das Variationsprinzip für die paraxiale Elektronenbewegung wird für vorgegebenen Ding- und Bildort eine geeignete Schar von Vergleichskurven eingeführt, welche die elektronenoptische Vergrößerung als variablen Parameter enthalten. Indem der Eigenwert der Linsenstärke als das Minimum hinsichtlich dieses Parameters bestimmt wird, erhält man gute Näherungsformeln gleichzeitig für die Linsenstärke und die Vergrößerung. Die beiden wesentlichen elektronenoptischen Kenngrößen können so für ein beliebiges Abbildungsfeld ohne Integration der Differentialgleichung der paraxialen Elektronenbahnen angegeben werden.

Eine der leistungsfähigsten Methoden der angewandten Mathematik bildet das Rayleigh-Ritzsche Verfahren zur angenäherten Berechnung der Eigenwerte eines Randwertproblems. Man kann sagen, daß man ein analytisches Problem weitgehend auch rechnerisch beherrscht, wenn es gelingt, dieses als Eigenwertproblem zu fassen. Vor zwanzig Jahren haben Paul Funk und der Verfasser in einer gemeinsamen Arbeit<sup>2</sup> diese Methode auf die Bestimmung der optischen Konstanten von Elektronenlinsen übertragen. In Erinnerung an diese Zusammenarbeit möchte ich mir erlauben, die folgende kleine Ergänzung zum Thema meinem verehrten Lehrer und Freund Paul Funk zu seinem 70. Geburtstag zu widmen.

Die erwähnte Arbeit bezog sich auf den Fall, daß das Abbildungsfeld längs der Achse nach beiden Seiten hin begrenzt ist, so daß Ding und Bild im feldfreien Raum angenommen werden konnten. Unter diesen Voraussetzungen hat man vollkommene Analogie mit der Lichteoptik. Das Abbildungsfeld wirkt auf die Elektronenstrahlen wie eine Linse von endlicher Dicke und die Aufgabe bestand darin, die Kardinal-elemente dieser Linse aus einem Eigenwertproblem zu bestimmen.

In der Praxis der magnetischen Elektronenmikroskopie liegt jedoch das Objekt meist im Feld. In diesem Falle hat es keinen Sinn, von den Kardinal-elementen der Linse zu sprechen. Aber schließlich stellen diese auch nur Hilfsgrößen dar, um die wesentlichen Eigenschaften der Abbildung, nämlich den Zusammenhang zwischen Ding- und Bildort und die Vergrößerung zu berechnen. Man wird daher unmittelbar auf die Bestimmung dieser beiden Eigenschaften lossteuern.

Wir wollen uns im folgenden auf rein magnetische Linsen beschränken, da die Ausdehnung der Überlegungen auf elektrostatische Linsen unmittelbar klar ist.

<sup>1</sup> Zur Zeit New York, Farrand Optical Co.

<sup>2</sup> Paul Funk und Walter Glaser: Berechnung elektronenoptischer Konstanten als Eigenwertproblem. Z. Physik **102**, 603 (1936).

Ding- und Bildort sind durch zwei aufeinanderfolgende Nullstellen der paraxialen Elektronenbahnen gegeben, deren Differentialgleichung

$$r'' + \frac{e}{8mU} B_z^2(z) r = 0 \quad (1)$$

lautet.  $B_z(z)$  ist dabei die  $z$ -Komponente der magnetischen Feldstärke längs der Linsenachse und  $U$  die Voltgeschwindigkeit der Elektronen. Setzt man

$$z = a x,$$

wobei  $a$  eine charakteristische Länge (z. B. Spulenradius) bedeutet, und schreibt man

$$F(x) = \frac{1}{B_0} B_z(ax) \quad (3)$$

und

$$k^2 = \frac{e B_0^2 a^2}{8mU} = \frac{e \mu_0^2}{8m f^2} \cdot \frac{N^2 J^2}{U} \quad \left( f = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx \right), \quad (4)$$

wobei  $NJ$  die Amperewindungszahl der Linse ist, so erhält man (1) in der dimensionslosen Gestalt

$$r''(x) + k^2 F^2(x) r(x) = 0. \quad (5)$$

Bei vorgegebenem Dingort  $x_0$  und Bildort  $x_1$  hat man also das Randwertproblem (5) mit den Randbedingungen

$$r(x_0) = 0, \quad r(x_1) = 0 \quad (6)$$

zu lösen. Die Eigenwerte  $k^2$  stellen jene Werte der „Linsenstärke“ (4) dar, für die das in  $x_0$  befindliche Objekt auf den in  $x_1$  befindlichen Bildschirm scharf abgebildet wird.

Außer der Linsenstärke  $k^2$  haben wir als zweite wesentliche Eigenschaft der Abbildung ihre Vergrößerung  $\beta$ . Sie folgt auf Grund des Helmholtz-Lagrangeschen Satzes aus der Eigenlösung (6) mittels

$$\beta = \frac{r'(x_0)}{r'(x_1)}. \quad (7)$$

Die Differentialgleichung (5) zusammen mit den Randbedingungen (6) stellt bekanntlich die Bedingung für die Funktion  $r(x)$  dar, den Eigenwertparameter

$$k^2 = \frac{\int_{x_0}^{x_1} r'^2 dx}{\int_{x_0}^{x_1} F^2 r^2 dx} \quad (8)$$

zu einem Minimum zu machen. Setzt man eine beliebige, den Randbedingungen (6) genügende Vergleichsfunktion  $r(x)$  in (8) ein, so erhält man einen Näherungswert des Eigenwertes, der um so genauer ist, je besser die Vergleichsfunktion mit der wirklichen Elektronenbahn übereinstimmt. Je größer diese Übereinstimmung ist, ein um so kleinerer Wert ergibt sich für  $k^2$  und umgekehrt.

Um zu einer günstigen Versuchsfunktion zu gelangen, führen wir mittels

$$x = \operatorname{ctg} \varphi \quad (9)$$

die neue unabhängige Variable  $\varphi$  ein ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) und gehen mittels

$$r = \frac{v(\varphi)}{\sin \varphi} \quad (10)$$



auch zu einer neuen abhängigen Variablen  $v$  über. Gl. (5) erhält damit die Gestalt

$$v''(\varphi) + [1 + k^2 \Psi^2(\varphi)] v(\varphi) = 0, \quad (11)$$

wenn man zur Abkürzung

$$\Psi(\varphi) = \frac{1}{B_0} \frac{B_z(a \operatorname{ctg} \varphi)}{\sin^2 \varphi} \quad (12)$$

setzt<sup>3</sup>. Das Variationsproblem (8) geht über in

$$k^2 = \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (v'^2 - v^2) d\varphi}{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \Psi^2 v^2 d\varphi} \quad (13)$$

und die Randbedingungen werden

$$v(\varphi_0) = 0, \quad v(\varphi_1) = 0. \quad (14)$$

Aus (11) folgt nun, daß für  $\Psi = 1$ , das heißt nach (12) für das Magnetfeld

$$B_z(z) = B_0 \sin^2 \varphi = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}, \quad (15)$$

welches einen für Elektronenlinsen typischen glockenförmigen Verlauf zeigt, Gl. (11) die strenge Lösung

$$v = \sin \omega (\varphi - \varphi_0) \quad (16)$$

besitzt.  $\omega$  ist in diesem Falle mit  $k^2$  durch

$$\omega^2 = k^2 + 1$$

verknüpft. Mit  $\varphi_1$  hängt es nach (16) durch

$$\omega = \frac{\pi}{\varphi_0 - \varphi_1} \quad (17)$$

zusammen.

Die Vergrößerung  $\beta_0$  berechnet sich mit (9), (10) und (16) entsprechend (7) zu

$$\beta_0 = - \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_1}. \quad (18)$$

Für gegebenen Dingort  $\varphi_0$  und Bildort  $\varphi_1$  kennen wir also den exakten Wert der Vergrößerung  $\beta_0$  und des Parameters  $k^2$  der Linsenstärke

$$k^2 = \omega^2 - 1 = \frac{\pi^2 - (\varphi_0 - \varphi_1)^2}{(\varphi_0 - \varphi_1)^2}, \quad (19)$$

wenn das Feld die Form (15) hat.

Da alle Linsfelder einen typisch glockenförmigen Verlauf haben, wird (16), das heißt

$$v = \sin \pi \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1} \quad (20)$$

auch im allgemeinen Fall eine gute Näherung für die Elektronenbahnen darstellen und (18) wird allgemein einen Näherungswert für die Vergrößerung geben.

In einer ersten Näherung (Rayleighsche Methode) wird man daher auch für ein beliebiges Feld (12) an (20) festhalten und zur Berechnung der Linsenstärke  $k_0^2$  die Gl. (13), das heißt mit (17) und (20) die Formel

$$\frac{1}{k_0^2} = \frac{2(\varphi_1 - \varphi_0)}{\pi^2 - (\varphi_0 - \varphi_1)^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{B_z^2(a \operatorname{ctg} \varphi)}{B_0^2 \sin^4 \varphi} \sin^2 \pi \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0} d\varphi \quad (21)$$

<sup>3</sup> W. Glaser: Grundlagen der Elektronenoptik. Wien. 1952, oder Handbuch der Physik (herausgegeben von S. Flügge), Bd. 33. Heidelberg. 1955.

verwenden. Wenn man die Definitionen (4) in (21) einführt, erhält man für das Verhältnis  $U/N^2 J^2$  von Beschleunigungsspannung zum Quadrat der Amperewindungszahl der Magnetlinse den Ausdruck:

$$\frac{U}{N^2 J^2} = \frac{e \mu_0^2}{8 m} \frac{2 (\varphi_1 - \varphi_0)}{\pi^2 - (\varphi_0 - \varphi_1)^2} \left( \int_0^\pi \frac{B_z (\alpha \operatorname{ctg} \varphi)}{\sin^2 \varphi} d\varphi \right)^{-2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{B_z^2 (\alpha \operatorname{ctg} \varphi)}{\sin^4 \varphi} \sin^2 \pi \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0} d\varphi. \quad (22)$$

Die Vergrößerung wird aus (18) ermittelt.

Wir gehen einen Schritt weiter: Mit W. Ritz betrachten wir den Randbedingungen (14) genügende Vergleichsfunktionen  $v(\varphi)$ , die einen variablen Parameter enthalten und bestimmen diesen Parameter so, daß  $k^2$  in Gl. (13) ein Minimum wird. Als dieser Parameter soll nun gerade die Vergrößerung  $\beta$  gewählt werden, die sich so auf Grund der Extremumsforderung eindeutig bestimmt. Da die Elektronenbahnen wegen  $r''/r < 0$  allgemein einen wellenartigen Charakter haben, ergänzen wir (20) durch das zweite Fourier-Glied, setzen also als Vergleichsfunktion

$$v = \sin \omega (\varphi - \varphi_0) + \lambda \sin 2 \omega (\varphi - \varphi_0), \quad (23)$$

wobei sich  $\omega$  aus  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  nach (17) bestimmt. Der Parameter steht nach (7), (9) und (23) mit der Vergrößerung  $\beta$  in der Beziehung

$$\beta = \frac{2 \lambda + 1}{2 \lambda - 1} \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_1} = \frac{1 + 2 \lambda}{1 - 2 \lambda} \beta_0, \quad (24)$$

wobei wir den bekannten, für das Glockenfeld streng gültigen Wert der Vergrößerung  $\beta_0$  nach (18) eingeführt haben. Aus (24) folgt

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\beta - \beta_0}{\beta + \beta_0}. \quad (25)$$

Da die Eigenfunktionen mit einer Konstanten multipliziert werden können, ergibt sich für die Vergleichskurve (23) als Funktion der Vergrößerung

$$v = (\beta + \beta_0) \sin \omega (\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} (\beta - \beta_0) \sin 2 \omega (\varphi - \varphi_0). \quad (26)$$

Wenn man (26) in (13) einsetzt, erhält man

$$k^2 = \frac{\pi}{2 \omega} \frac{4 (\omega^2 - 1) (\beta + \beta_0)^2 + (4 \omega^2 - 1) (\beta - \beta_0)^2}{A (\beta - \beta_0)^2 + 4 B (\beta^2 - \beta_0^2) + 4 C (\beta + \beta_0)^2}, \quad (27)$$

wobei  $A$ ,  $B$  und  $C$  die folgenden, unmittelbar aus dem Feld zu bestimmenden Konstanten sind:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \Psi^2 \sin^2 2 \omega (\varphi - \varphi_0) d\varphi, \quad (28)$$

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \Psi^2 \sin 2 \omega (\varphi - \varphi_0) \sin \omega (\varphi - \varphi_0) d\varphi, \quad (29)$$

$$C = \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \Psi^2 \sin^2 \omega (\varphi - \varphi_0) d\varphi. \quad (30)$$

Da  $k^2$  für die wirkliche Elektronenbahn ein Minimum ist, haben wir die Bedingung

$$\frac{\partial k^2}{\partial \beta} = 0. \quad (31)$$

Sie bedeutet, daß die im optischen System realisierte Vergrößerung mit einem Minimum der Linsenstärke verwirklicht wird. Mit der Abkürzung

$$\sigma = \frac{\omega^2 - 1}{4 \omega^2 - 1} = \frac{\pi^2 - (\varphi_0 - \varphi_1)^2}{4 \pi^2 - (\varphi_0 - \varphi_1)^2} < 1, \quad (32)$$



erhält man aus (31) und (27) für  $\beta$  die quadratische Gleichung:

$$B(\beta - \beta_0)^2 + 2(C - \sigma A)(\beta^2 - \beta_0^2) - 4B\sigma(\beta + \beta_0)^2 = 0. \quad (33)$$

Sie hat die Lösung

$$\beta = \beta_0 \frac{B(1 + 4\sigma) + 2\sqrt{(C - \sigma A)^2 + 4B^2\sigma}}{B(1 - 4\sigma) + 2(C - \sigma A)}. \quad (34)$$

Da für das einfache Glockenfeld ( $\Psi = 1$ , also  $B = 0$ ) die Vergrößerung  $\beta$  mit  $\beta_0$  übereinstimmt, mußte in (34) für die Quadratwurzel das positive Vorzeichen genommen werden.

Die zugehörige Linsenstärke wird nach (27)

$$k_{\min}^2 = \frac{\pi(4\omega^2 - 1)}{4\omega} \frac{A\sigma + C - \sqrt{(A\sigma - C)^2 + 4B^2\sigma}}{AC - B^2}. \quad (35)$$

Mit den beiden Gl. (34) und (35) sind die wesentlichen Kenngrößen der elektronenoptischen Abbildung für ein beliebiges Magnetfeld durch einfache Rechenformeln ausgedrückt, für welche die Integration der Differentialgleichung der Elektronenbahnen nicht erforderlich ist.

(Eingegangen am 22. Februar 1956)

## Über die Berücksichtigung der Reibung bei Schwingungsproblemen

Von W. Gröbner, Innsbruck

**Zusammenfassung.** Es werden Glieder bestimmt, die man zu den Differentialgleichungen der Schwingungsvorgänge hinzufügen muß, um die durch Reibung verursachte Dämpfung in Rechnung zu stellen.

Die bei allen mechanischen Bewegungsvorgängen auftretende Reibung ist ein sehr komplexes Phänomen, dem man mit präzisen theoretischen Untersuchungen schwer auf den Grund kommen kann. Tatsächlich ist die Reibung aus sehr vielen Komponenten zusammengesetzt, deren Auswirkungen im einzelnen unmöglich festgestellt werden können; es ist hier besser, diese verschiedenartigen Einflüsse in einem statistischen Mittelwert zu erfassen, der in passender Gestalt als Reibungskraft definiert wird und mit einem noch empirisch zu ermittelnden Koeffizienten behaftet ist.

Diesen Grundsatz werden wir auch im folgenden beibehalten. Die allgemeine Gestalt der Glieder in den aufzustellenden Differentialgleichungen, durch welche die Reibung berücksichtigt werden soll, können wir jedoch aus der Tatsache ableiten, daß die Reibungskräfte eine dauernde Abnahme der mechanischen Energie des betrachteten Systems zur Folge haben.

Die Differentialgleichungen eines schwingenden Systems, dessen Schwingungen in einer abwechselnden Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie und umgekehrt bestehen, leitet man am besten mit Hilfe des Hamiltonschen Variationsprinzips ab. Man muß zu diesem Zwecke zunächst die kinetische Energie  $T$  und die potentielle Energie  $U$  des Systems ermitteln.

Wir wollen hier, um das aufgeworfene Problem in etwas konkreterer Gestalt behandeln und anschreiben zu können, annehmen, daß der Zustand des zu untersuchenden mechanischen Systems — etwa einer schwingenden Membran oder schwingenden Platte — durch eine einzige Größe  $u(x, y; t)$  beschrieben ist, die von den Koordinaten  $x, y$  eines Punktes  $P$  in der  $(x, y)$ -Ebene und von der Zeit  $t$  abhängt. Der Punkt  $P$  sei auf das Innere eines Bereiches  $\mathfrak{B}$  in der  $(x, y)$ -Ebene beschränkt, der von einer einfachen geschlossenen Randkurve  $\mathfrak{C}$  begrenzt sei. Längs  $\mathfrak{C}$  seien die Werte

von  $u$  und eventuell der Ableitungen  $u_x, u_y$  vorgeschrieben, und zwar seien sie zeitlich konstant.

Die kinetische Energie ist dann:

$$T = \int_{\mathfrak{B}} \varrho u_t^2 dx dy, \quad (1)$$

mit einer überall positiven Funktion  $\varrho(x, y)$ , während für die potentielle Energie ein Integral

$$U = \int_{\mathfrak{B}} f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) dx dy \quad (2)$$

gefunden wird, dessen Integrand  $f$  eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion ihrer Argumente ist, die im übrigen nicht explizit von  $t$  abhängt.

Nach dem Hamiltonschen Prinzip findet man die Lösung  $u = u(x, y; t)$  des Problems als diejenige Funktion, für die das Funktional

$$\Omega = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathfrak{B}} (\varrho u_t^2 - f) dx dy \quad (3)$$

bei gegebener Anfangs- und Endlage einen stationären Wert erhält. Es muß also die Variation  $\delta\Omega$  verschwinden. Die Rechnung liefert zunächst:

$$\begin{aligned} \delta\Omega = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathfrak{B}} & \left[ 2\varrho u_t \delta u_t - \frac{\partial f}{\partial u} \delta u - \frac{\partial f}{\partial u_x} \delta u_x - \frac{\partial f}{\partial u_y} \delta u_y - \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} \delta u_{xx} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial f}{\partial u_{xy}} \delta u_{xy} - \frac{\partial f}{\partial u_{yy}} \delta u_{yy} \right] dx dy; \end{aligned}$$

wenn man hier in üblicher Weise partiell integriert und berücksichtigt, daß die Variation  $\delta u$  für  $t = t_1$  und  $t = t_2$ , sowie die Variationen  $\delta u, \delta u_x, \delta u_y$  längs des Randes  $\mathfrak{C}$  verschwinden (weil die Randwerte vorgeschrieben sind), so erhält man nach kurzer Rechnung:

$$\delta\Omega = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathfrak{B}} M(u) \delta u dx dy = 0 \quad (4)$$

mit

$$M(u) = 2\varrho u_{tt} + \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial u_{yy}}. \quad (5)$$

Im klassischen Fall, das heißt, wenn das System konservativ ist und keine Reibungskräfte wirken, muß die Variation (4) bei willkürlich gewähltem  $\delta u$  verschwinden, was nur dann der Fall ist, wenn im ganzen Inneren des Bereiches  $\mathfrak{B}$  die Differentialgleichung

$$M(u) = 0 \quad (6)$$

erfüllt ist. Wenn aber Reibungskräfte auftreten, dann wird diese Differentialgleichung nicht mehr in derselben Form erfüllt sein können.

Um einen Anhaltspunkt für die dann notwendige Änderung zu erhalten, wollen wir die Energie des Systems berechnen; wir erhalten sie, wenn wir aus der Lagrange-Funktion  $L = T - U$  die Hamilton-Funktion berechnen:

$$H(t) = \int_{\mathfrak{B}} (\varrho u_t^2 + f) dx dy = T + U. \quad (7)$$

Die Ableitung dieser Funktion nach der Zeit  $t$  ist:

$$\begin{aligned} H'(t) = \int_{\mathfrak{B}} & \left[ 2\varrho u_t u_{tt} + \frac{\partial f}{\partial u} u_t + \frac{\partial f}{\partial u_x} u_{xt} + \frac{\partial f}{\partial u_y} u_{yt} + \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} u_{xxt} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial f}{\partial u_{xy}} u_{xyt} + \frac{\partial f}{\partial u_{yy}} u_{yyt} \right] dx dy; \end{aligned}$$



auch hier kann man wieder partiell integrieren und muß dann die Tatsache berücksichtigen, daß die bei der partiellen Integration auftretenden Randintegrale sämtlich verschwinden, weil die Werte von  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_y$  voraussetzungsgemäß längs  $\mathfrak{L}$  zeitunabhängig vorgeschrieben sind, also  $u_t$ ,  $u_{xt}$ ,  $u_{yt}$  längs  $\mathfrak{L}$  verschwinden. Mit Benützung von (5) findet man:

$$H'(t) = \int_{\mathfrak{B}} M(u) u_t dx dy, \quad (8)$$

also  $H'(t) = 0$ , wenn die Differentialgleichung  $M(u) = 0$  erfüllt ist. Wenn wir aber Reibungsverluste haben, dann muß  $H'(t) < 0$  sein, und wir dürfen  $M(u)$  nicht Null setzen, sondern gleich einer Funktion, die, mit  $u_t$  multipliziert, einen überall negativen Integranden liefert. Dafür gibt es immer noch sehr viele Möglichkeiten, die einfachste Art aber ist die folgende:

$$M(u) = -\varepsilon u_t^{2n-1}, \quad (9)$$

wo  $\varepsilon$  eine positive Funktion von  $x, y$  (innerhalb  $\mathfrak{B}$ ) und  $n$  eine natürliche Zahl bedeuten.

Der einfachste Fall ist  $n = 1$ , und man wird immer trachten, damit auszukommen, weil dann die Differentialgleichung (9) linear ist (falls  $f$  ein quadratisches Polynom der Argumente  $u, u_x, \dots$  ist). Nimmt man dann auch für  $\varepsilon$  eine positive Konstante, so wird

$$H'(t) = -\varepsilon \int_{\mathfrak{B}} u_t^2 dx dy \leq 0; \quad (10)$$

dann ist  $H'(t)$  solange negativ, das heißt, die Energie des Systems nimmt solange ab, als  $u_t \neq 0$  ist, und  $H'(t) = 0$ , das heißt, die Energie des Systems konstant, wenn in  $\mathfrak{B}$  überall  $u_t = 0$  erreicht ist, oder mit anderen Worten, wenn das System in Ruhe gekommen ist. Das entspricht ganz den Forderungen, die wir für Reibungsverluste zu stellen haben.

Wir wollen dies auf das einfachste Beispiel, die schwingende Saite, anwenden. Der Zustand der Saite ist durch eine Funktion  $u(x, t)$  von einer einzigen Lagekoordinate  $x$  und der Zeit  $t$  in einem Bereich  $\mathfrak{B}$ :  $0 \leq x \leq a$  beschrieben; ferner ist  $\varrho = \frac{1}{2}\mu$  konstant ( $\mu$  = Massendichte der Saite) und  $f = \frac{c}{2}u_x^2$  mit einer von den elastischen Eigenschaften des Materials abhängigen Konstanten  $c$  ( $c = 2G \frac{m-1}{m-2}$ ). Die Differentialgleichung (9) wird also in diesem Fall:

$$M(u) = \mu u_{tt} - c u_{xx} = -\varepsilon u_t \quad (11)$$

mit den Randbedingungen

$$u(0, t) = u(a, t) = 0 \quad (11')$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x). \quad (11'')$$

Bei konstantem Reibungskoeffizienten  $\varepsilon$  findet man leicht nach den klassischen Methoden die Lösung:

$$u(x, t) = e^{-\frac{\varepsilon t}{2\mu}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} [\alpha_n \cos \eta_n t + \beta_n \sin \eta_n t], \quad (12)$$

mit den Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen:

$$\eta_n = \frac{2n\pi}{\mu a} \sqrt{c\mu - \left(\frac{\varepsilon a}{2n\pi}\right)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_n$  und  $\beta_n$  sind durch die Anfangsbedingungen (11'') bestimmt, und zwar gilt:

$$\alpha_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\eta_n} \left[ \frac{2}{a} \int_0^a h(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx + \frac{\varepsilon}{2\mu} \alpha_n \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Den reibungslosen Fall erhält man wieder für  $\varepsilon = 0$ . Wie man sieht, hat die Reibung einerseits eine allgemeine Dämpfung, die im Faktor  $e^{-\frac{\varepsilon t}{2\mu}}$  zum Ausdruck kommt, andererseits aber auch eine Verringerung der Frequenzen der Eigenschwingungen zur Folge, die bei den niederen Tönen stärker ist als bei den Obertönen; bei genügend großer Reibung können sogar die untersten Töne überhaupt ausfallen, nämlich dann, wenn in (13) der Radikand negativ wird.

Ganz ähnlich ist das zweite Beispiel der schwingenden Membran: hier hat man  $\varrho = \frac{1}{2}\mu$  und  $f = \frac{a}{2}(u_x^2 + u_y^2)$  zu setzen mit gewissen Materialkonstanten  $\mu, a$ . Die Differentialgleichung (9) lautet hier:

$$M(u) = \mu u_{tt} - a \Delta u = -\varepsilon u_t;$$

wählen wir als Bereich  $\mathfrak{B}$  den Einheitskreis in der  $(x, y)$ -Ebene, so ergibt das nach dem Übergang auf Polarkoordinaten die Differentialgleichung

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} - \frac{\mu}{a} u_{tt} - \frac{\varepsilon}{a} u_t = 0, \quad (14)$$

welche von der gesuchten Funktion  $u(r, \varphi; t)$  im Innern von  $\mathfrak{B}$ , das heißt für  $0 \leq r < 1$  erfüllt werden muß, mit der Randbedingung

$$u(1, \varphi; t) = 0 \quad (14')$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(r, \varphi; 0) = g(r, \varphi), \quad u_t(r, \varphi; 0) = h(r, \varphi). \quad (14'')$$

Auch hier kann man mit den klassischen Eigenwertmethoden die Lösung finden:

$$u(r, \varphi; t) = e^{-\frac{\varepsilon t}{2\mu}} \sum_{n, m=0}^{\infty} J_n(\lambda_{nm} r) \{ (\alpha_{nm} \cos n\varphi + \gamma_{nm} \sin n\varphi) \cos \lambda_{nm}' t + (\beta_{nm} \cos n\varphi + \delta_{nm} \sin n\varphi) \sin \lambda_{nm}' t \}; \quad (15)$$

hier bedeutet  $\lambda_{nm}$  die  $m$ -te Nullstelle ( $\geq 0$ ) der Bessel-Funktion  $J_n(x)$  und

$$\lambda_{nm}' = \lambda_{nm} \sqrt{\frac{a}{\mu} - \left( \frac{\varepsilon}{2\mu \lambda_{nm}} \right)^2}. \quad (16)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_{nm}, \dots, \delta_{nm}$  sind durch die Anfangsbedingungen (14'') bestimmt, und zwar findet man dafür die Werte:

$$\alpha_{nm} = \frac{2}{\pi [J_n'(\lambda_{nm})]^2} \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) J_n(\lambda_{nm} r) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$\gamma_{nm} = \frac{2}{\pi [J_n'(\lambda_{nm})]^2} \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) J_n(\lambda_{nm} r) \sin n\varphi d\varphi,$$



$$\beta_{nm} = \frac{1}{\lambda_{nm}'} \left\{ \frac{2}{\pi [J_n'(\lambda_{nm})]^2} \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} h(r, \varphi) J_n(\lambda_{nm} r) \cos n \varphi d\varphi + \frac{\varepsilon}{2\mu} \alpha_{nm} \right\},$$

$$\delta_{nm} = \frac{1}{\lambda_{nm}'} \left\{ \frac{2}{\pi [J_n'(\lambda_{nm})]^2} \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} h(r, \varphi) J_n(\lambda_{nm} r) \sin n \varphi d\varphi + \frac{\varepsilon}{2\mu} \gamma_{nm} \right\}.$$

Den reibungslosen Fall erhält man wieder, wenn man in diesen Formeln einfach  $\varepsilon = 0$  setzt. Der Einfluß der Reibung macht sich also auch hier wieder durch einen globalen Dämpfungsfaktor  $e^{-\frac{\varepsilon t}{2\mu}}$  und durch eine Herabsetzung der Frequenzen  $\lambda_{nm}'$  der Eigenschwingungen geltend, und zwar ist die letztere für die tiefsten Frequenzen am deutlichsten; sie können sogar bei starker Reibung ganz ausfallen.

Der in diesen Beispielen benützte Ansatz kann noch in mannigfaltiger Weise abgeändert werden, wodurch man etwaigen experimentellen Tatsachen besser Rechnung tragen kann. Freilich führen derartige kompliziertere Ansätze auf nichtlineare Differentialgleichungen, deren Lösung nicht mehr in geschlossener Gestalt wie bei den eben durchgerechneten zwei Beispielen dargeboten werden kann. Übrigens können dieselben Überlegungen auch noch für andere Zwecke ausgenützt werden<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Vgl. meine Arbeit: Über Streuungs- und Stabilisierungsfunktionen bei Differentialgleichungen der theoretischen Mechanik. *Annali di Matematica pura ed applicata*, Serie IV, Tomo 39, 11—14 (1955).

(Eingegangen am 3. März 1956)

## Zur Stabilität der Strickleiter

Von G. Heinrich, Wien

Mit 2 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Es wird das Gleichgewicht und die Stabilität einer „kontinuierlichen Strickleiter“ untersucht, die an einem Ende festgehalten ist und am anderen, freien Ende durch zwei konservative Kräfte belastet ist. Die erste Variation eines bestimmten Integrals liefert die möglichen Gleichgewichtsfälle, die zweite Variation liefert ein Stabilitätskriterium. Dieses wird für den Fall der schraubensymmetrischen Lösung angegeben.

### I. Problemstellung

In seiner Arbeit „Zur Statik der Strickleiter“ behandelt W. Wunderlich<sup>1</sup> die Gleichgewichtsformen einer Strickleiter, die aus einer Anzahl von gleich langen Stäben besteht, deren Enden in gleichen Abständen an zwei Schnüren befestigt sind. Wir denken uns einen Grenzprozeß durchgeführt, bei dem die Abstände der Stäbe gegen Null gehen und gelangen so zur „kontinuierlichen Strickleiter“, deren Gleichgewichtsformen ebenfalls in der Arbeit von Wunderlich behandelt werden. Die hier durchgeführte Untersuchung der Stabilität solcher Gleichgewichtsformen erfolgte auf Anregung von Wunderlich, der an einem Strickleitermodell, das er anfertigen ließ, das Auftreten von Instabilitäten beobachten konnte.

Im folgenden soll zunächst dem Zusammenhang zwischen den äußeren Kräften und den Gleichgewichtsformen nachgegangen werden. Daran schließt sich die Stabilitätsuntersuchung. Bei Wunderlich wird nur das innere Gleichgewicht der Strickleiter behandelt, auf den Zusammenhang mit den äußeren Kräften wird nicht eingegangen.

<sup>1</sup> *Math. Z.* 55, H. 1, 13—22 (1951).

Der Rechnung werden folgende Annahmen zugrunde gelegt: Die „Holme“ der Strickleiter sind undeformbare Fäden, die nur auf Zug beanspruchbar sind. Die „Sprossen“ sind starre Stäbe, die mit den Holmen gelenkig und reibungsfrei verbunden sind. Das Eigengewicht der Elemente, die die Strickleiter aufbauen, wird nicht berücksichtigt. Die erste Sprosse denken wir uns festgehalten. An den beiden Verbindungsstellen zwischen der letzten Sprosse und den Holmen sollen zwei eingeprägte Kräfte wirken, deren Größen und Richtungen vorgegeben sind. Die Kräfte sind in diesem Fall konservativ. Unter den getroffenen Annahmen existieren sonst keine anderen eingeprägten Kräfte. Die Minima des Potentials dieser Kräfte müssen demnach die stabilen Gleichgewichtslagen liefern.

## II. Formulierung des Potentials der eingeprägten Kräfte

Um das Potential der eingeprägten Kräfte zu berechnen, denken wir uns etwa die Kräfte durch Schnurspannungen erzeugt; die Schnüre sollen über Rollen geführt werden und durch Gewichte gespannt werden. Sind die Abstände zwischen der Rolle und der Befestigungsstelle der Schnur an der Strickleiter genügend groß, dann ändern sich die Richtungen der Schnurspannungen praktisch nicht, wenn man verschiedene Lagen der Strickleiter betrachtet. Die potentielle Energie der die Schnurspannungen erzeugenden Gewichte kann dann als Potential der eingeprägten Kräfte angesehen werden.

Sind  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}_2$  die beiden Kraftvektoren, die an den Enden der Holme 1 und 2 angreifen, und sind  $r_{1E}$  und  $r_{2E}$  die Ortsvektoren der beiden Angriffspunkte in bezug auf einen festen Punkt, sind ferner  $r_{1A}$  und  $r_{2A}$  die Ortsvektoren der festgehaltenen Anfangspunkte der beiden Holme, so ist die Arbeit  $\delta A$  der eingeprägten Kräfte bei der Verschiebung der Angriffspunkte um  $\delta r_{1E}$  und  $\delta r_{2E}$  gegeben durch<sup>2</sup>

$$\delta A = \mathfrak{P}_1 \cdot \delta r_{1E} + \mathfrak{P}_2 \cdot \delta r_{2E} = \mathfrak{P}_1 \cdot \delta(r_{1E} - r_{1A}) + \mathfrak{P}_2 \cdot \delta(r_{2E} - r_{2A}),$$

da nach Voraussetzung  $\delta r_{1A} = \delta r_{2A} = 0$  ist. Bezeichnet man das Potential der eingeprägten Kräfte mit  $U$ , so gilt:  $\delta A = -\delta U$ . Da  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}_2$  nach Voraussetzung konstant sind, kann man also setzen:

$$U = -[\mathfrak{P}_1 \cdot (r_{1E} - r_{1A}) + \mathfrak{P}_2 \cdot (r_{2E} - r_{2A})]. \quad (1)$$

Es soll nun  $U$  nach Gl. (1) durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden, damit man die Methoden der Variationsrechnung anwenden kann. Dazu wählen wir eine Parameterdarstellung der beiden Holmkurven in der Form:  $r_1 = r_1(s)$ ,  $r_2 = r_2(s)$ , wobei  $s$  am einfachsten als Bogenlänge zwischen dem Fixpunkt und dem betrachteten Punkt der Holmkurve eingeführt wird. Es gilt dann, wenn  $l$  die ganze Bogenlänge eines Holmes bedeutet:  $r_{1A} = r_1(0)$ ,  $r_{1E} = r_1(l)$ ,  $r_{2A} = r_2(0)$ ,  $r_{2E} = r_2(l)$ . Schreiben wir noch für  $\frac{dr_1}{ds} = r_1'$  und  $\frac{dr_2}{ds} = r_2'$ , so läßt sich die Gl. (1) wegen der Konstanz von  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}_2$  auch schreiben:

$$U = - \int_0^l (\mathfrak{P}_1 \cdot r_1' + \mathfrak{P}_2 \cdot r_2') ds.$$

Sind  $P_{1x}$ ,  $P_{1y}$ ,  $P_{1z}$  bzw.  $P_{2x}$ ,  $P_{2y}$ ,  $P_{2z}$  die Komponenten von  $\mathfrak{P}_1$  bzw.  $\mathfrak{P}_2$  und  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  bzw.  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$  die Komponenten von  $r_1$  bzw.  $r_2$ , so erhält man für  $U$  die skalare Darstellung

$$U = - \int_0^l (P_{1x} \cdot x_1' + P_{1y} \cdot y_1' + P_{1z} \cdot z_1' + P_{2x} \cdot x_2' + P_{2y} \cdot y_2' + P_{2z} \cdot z_2') ds. \quad (2)$$

<sup>2</sup> Der Punkt soll das innere Produkt bedeuten.

Wir machen die Koordinaten dimensionslos, indem wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x_1}{l}, \\ \eta_1 &= \frac{y_1}{l}, \\ \zeta_1 &= \frac{z_1}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{x_2}{l}, \\ \eta_2 &= \frac{y_2}{l}, \\ \zeta_2 &= \frac{z_2}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{s}{l}. \quad (5)$$

Damit geht (1a) über in:

$$U = -l \int_0^1 (P_{1x} \cdot \xi_1' + P_{1y} \cdot \eta_1' + P_{1z} \cdot \zeta_1' + P_{2x} \cdot \xi_2' + P_{2y} \cdot \eta_2' + P_{2z} \cdot \zeta_2') d\sigma. \quad (6)$$

Es bestehen nun folgende Nebenbedingungen:

$$\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 - 1 = 0, \quad (7)$$

$$\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 - 1 = 0. \quad (8)$$

Schließlich müssen die Abstände der Punkte der Holmkurve 1 von den Punkten der Holmkurve 2, die zu demselben Wert von  $s$  gehören, den konstanten Betrag  $a$  (Sprossenlänge) besitzen.

Es ist also:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = a^2$$

oder, nach Gl. (3) und (4):

$$(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2 - \alpha^2 = 0, \quad (9)$$

mit 
$$\alpha = \frac{a}{l}. \quad (9a)$$

Stabile Gleichgewichtslagen sind nun dadurch gekennzeichnet, daß sie den Wert  $U$  bei Bestehen der Nebenbedingungen (7), (8) und (9) zu einem Minimum machen. Es liegt also ein isoperimetrisches Problem vor, das wir durch Einführen geeigneter Lagrangescher Multiplikatoren  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  (die im allgemeinen Funktionen von  $\sigma$  sind) folgendermaßen formulieren können: Es ist der Ausdruck:

$$\begin{aligned} U = -l \int_0^1 \{ & P_{1x} \xi_1' + P_{1y} \eta_1' + P_{1z} \zeta_1' + P_{2x} \xi_2' + P_{2y} \eta_2' + P_{2z} \zeta_2' + \\ & + \lambda_1 (\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 - 1) + \lambda_2 (\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 - 1) + \lambda_3 [(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \\ & + (\zeta_2 - \zeta_1)^2 - \alpha^2] \} d\sigma \end{aligned} \quad (10)$$

zu einem Minimum zu machen. Der Integrand enthält 9 unbekannte Funktionen von  $\sigma$ , und zwar:  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\zeta_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\eta_2$ ,  $\zeta_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ .

Wir setzen zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 - \xi_1 &= \alpha \xi, \\ \eta_2 - \eta_1 &= \alpha \eta, \\ \zeta_2 - \zeta_1 &= \alpha \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



dann gilt nach Gl. (9):

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \quad (12)$$

und (10) erhält die Form:

$$U = -l \int_0^1 \{ P_{1x} \xi_1' + P_{1y} \eta_1' + P_{1z} \zeta_1' + P_{2x} \xi_2' + P_{2y} \eta_2' + P_{2z} \zeta_2' + \\ + \lambda_1 (\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 - 1) + \lambda_2 (\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 - 1) + \alpha^2 \lambda_3 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1) \} d\sigma \quad (13)$$

oder, wenn man die Integration der ersten 6 Glieder durchführt<sup>3</sup>:

$$U = -l \left\{ P_{1x} \xi_{1E} + P_{1y} \eta_{1E} + P_{1z} \zeta_{1E} + P_{2x} \xi_{2E} + P_{2y} \eta_{2E} + P_{2z} \zeta_{2E} + \right. \\ \left. + \int_0^1 [\lambda_1 (\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 - 1) + \lambda_2 (\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 - 1) + \alpha^2 \lambda_3 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1)] d\sigma \right\}.$$

Da die 6 Randwerte  $\xi_{1E}$  bis  $\zeta_{2E}$  nicht unabhängig sind, sondern auch durch die Beziehung (12) verknüpft sind, wollen wir dem in der Weise Rechnung tragen, daß wir auch für die Randwerte einen Lagrangeschen Multiplikator  $\mu$  einführen. Wir erhalten dann, bei Beachtung von (12):

$$U = -l \left\{ P_{1x} \xi_{1E} + P_{1y} \eta_{1E} + P_{1z} \zeta_{1E} + P_{2x} \xi_{2E} + P_{2y} \eta_{2E} + P_{2z} \zeta_{2E} + \right. \\ \left. + \alpha^2 \mu (\xi_E^2 + \eta_E^2 + \zeta_E^2 - 1) + \int_0^1 [\lambda_1 (\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 - 1) + \right. \\ \left. + \lambda_2 (\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 - 1) + \alpha^2 \lambda_3 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1)] d\sigma \right\}. \quad (13a)$$

### III. Die erste und die zweite Variation von $U$

Aus Gl. (13a) erhält man bei Entwicklung bis zu Größen zweiter Kleinheitsordnung:

$$U + \delta U + \frac{1}{2} \delta^2 U = -l \{ P_{1x} (\xi_{1E} + \delta \xi_{1E}) + P_{1y} (\eta_{1E} + \delta \eta_{1E}) + P_{1z} (\zeta_{1E} + \delta \zeta_{1E}) + \\ + P_{2x} (\xi_{2E} + \delta \xi_{2E}) + P_{2y} (\eta_{2E} + \delta \eta_{2E}) + P_{2z} (\zeta_{2E} + \delta \zeta_{2E}) + \alpha^2 (\mu + \delta \mu) [(\xi_E + \delta \xi_E)^2 + \\ + (\eta_E + \delta \eta_E)^2 + (\zeta_E + \delta \zeta_E)^2 - 1] - l \int_0^1 \{ (\lambda_1 + \delta \lambda_1) [(\xi_1' + \delta \xi_1')^2 + (\eta_1' + \delta \eta_1')^2 + \\ + (\zeta_1' + \delta \zeta_1')^2 - 1] + (\lambda_2 + \delta \lambda_2) [(\xi_2' + \delta \xi_2')^2 + (\eta_2' + \delta \eta_2')^2 + (\zeta_2' + \delta \zeta_2')^2 - 1] + \\ + \alpha^2 (\lambda_3 + \delta \lambda_3) [(\xi + \delta \xi)^2 + (\eta + \delta \eta)^2 + (\zeta + \delta \zeta)^2 - 1] \} d\sigma. \\$$

Die Trennung nach Größen erster und zweiter Kleinheitsordnung liefert, bei Beachtung von Gl. (11) und (12):

$$\delta U = -l \{ P_{1x} \delta \xi_{1E} + P_{1y} \delta \eta_{1E} + P_{1z} \delta \zeta_{1E} + P_{2x} \delta \xi_{2E} + P_{2y} \delta \eta_{2E} + P_{2z} \delta \zeta_{2E} + \\ + 2 \mu \alpha [\xi_E (\delta \xi_{2E} - \delta \xi_{1E}) + \eta_E (\delta \eta_{2E} - \delta \eta_{1E}) + \zeta_E (\delta \zeta_{2E} - \delta \zeta_{1E}) + \\ + \alpha^2 \delta \mu (\xi_E^2 + \eta_E^2 + \zeta_E^2 - 1)] - l \int_0^1 \{ 2 \lambda_1 (\xi_1' \delta \xi_1' + \eta_1' \delta \eta_1' + \zeta_1' \delta \zeta_1') + \\ + 2 \lambda_2 (\xi_2' \delta \xi_2' + \eta_2' \delta \eta_2' + \zeta_2' \delta \zeta_2') + 2 \alpha^2 \lambda_3 (\xi \delta \xi + \eta \delta \eta + \zeta \delta \zeta) + \\ + \delta \lambda_1 (\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 - 1) + \delta \lambda_2 (\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 - 1) + \alpha^2 \delta \lambda_3 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1) \} d\sigma, \quad (14)$$

<sup>3</sup> Hier wurden die der unteren Grenze entsprechenden konstanten Glieder weggelassen, da sie für das Potential unerheblich sind.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \delta^2 U = & -l \{ \alpha^2 \mu (\delta \xi_E^2 + \delta \eta_E^2 + \delta \zeta_E^2) + 2 \alpha^2 \delta \mu (\xi_E \delta \xi_E + \eta_E \delta \eta_E + \zeta_E \delta \zeta_E) \} - \\
& - l \int_0^1 \{ \lambda_1 (\delta \xi_1'^2 + \delta \eta_1'^2 + \delta \zeta_1'^2) + \lambda_2 (\delta \xi_2'^2 + \delta \eta_2'^2 + \delta \zeta_2'^2) + \alpha^2 \lambda_3 (\delta \xi^2 + \delta \eta^2 + \delta \zeta^2) + \\
& + 2 \delta \lambda_1 (\xi_1' \delta \xi_1' + \eta_1' \delta \eta_1' + \zeta_1' \delta \zeta_1') + 2 \delta \lambda_2 (\xi_2' \delta \xi_2' + \eta_2' \delta \eta_2' + \zeta_2' \delta \zeta_2') + \\
& + 2 \alpha^2 \delta \lambda_3 (\xi \delta \xi + \eta \delta \eta + \zeta \delta \zeta) \} d\sigma. \quad (15)
\end{aligned}$$

#### IV. Die Ermittlung der Gleichgewichtslagen

Aus den Bedingungen  $\delta U = 0$  müssen sich die Gleichgewichtslagen herleiten lassen. Aus Gl. (14) folgt, nach Ausführung geeigneter partieller Integrationen, bei Beachtung von Gl. (11):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l} \delta U = & - \left\{ [P_{1x} \delta \xi_{1E} + P_{1y} \delta \eta_{1E} + P_{1z} \delta \zeta_{1E} + P_{2x} \delta \xi_{2E} + P_{2y} \delta \eta_{2E} + P_{2z} \delta \zeta_{2E}] + \right. \\
& + 2 \alpha \mu [\xi_E (\delta \xi_{2E} - \delta \xi_{1E}) + \eta_E (\delta \eta_{2E} - \delta \eta_{1E}) + \zeta_E (\delta \zeta_{2E} - \delta \zeta_{1E}) + \\
& + \alpha^2 \delta \mu (\xi_E^2 + \eta_E^2 + \zeta_E^2 - 1) + 2 \lambda_{1E} (\xi_{1E}' \delta \xi_{1E} + \eta_{1E}' \delta \eta_{1E} + \zeta_{1E}' \delta \zeta_{1E}) + \\
& + 2 \lambda_{2E} (\xi_{2E}' \delta \xi_{2E} + \eta_{2E}' \delta \eta_{2E} + \zeta_{2E}' \delta \zeta_{2E}) \left. \right\} + \int_0^1 \{ 2 [(\lambda_1 \xi_1')' \delta \xi_1 + (\lambda_1 \eta_1')' \delta \eta_1 + \\
& + (\lambda_1 \zeta_1')' \delta \zeta_1 + (\lambda_2 \xi_2')' \delta \xi_2 + (\lambda_2 \eta_2')' \delta \eta_2 + (\lambda_2 \zeta_2')' \delta \zeta_2] - 2 \lambda_3 [(\xi_2 - \xi_1) (\delta \xi_2 - \delta \xi_1) + \\
& + (\eta_2 - \eta_1) (\delta \eta_2 - \delta \eta_1) + (\zeta_2 - \zeta_1) (\delta \zeta_2 - \delta \zeta_1) - \delta \lambda_1 (\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 - 1) - \\
& - \delta \lambda_2 (\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 - 1) - \delta \lambda_3 [(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2 - \alpha^2] \} d\sigma = 0. \quad (16)
\end{aligned}$$

Hierin bedeuten die Striche Ableitungen nach  $\sigma$ , während der Index  $E$  die Werte am Ende der Holme ( $\sigma = 1$ ) bedeutet.

Es müssen nun alle Koeffizienten der Linearform der neun Variationen  $\delta \xi_1, \delta \eta_1, \dots, \delta \lambda_3$  des Integranden verschwinden.

Dies liefert folgende Gleichungen:

$$(\lambda_1 \xi_1')' + \lambda_3 (\xi_2 - \xi_1) = 0, \quad (17a)$$

$$(\lambda_1 \eta_1')' + \lambda_3 (\eta_2 - \eta_1) = 0, \quad (17b)$$

$$(\lambda_1 \zeta_1')' + \lambda_3 (\zeta_2 - \zeta_1) = 0, \quad (17c)$$

$$(\lambda_2 \xi_2')' - \lambda_3 (\xi_2 - \xi_1) = 0, \quad (18a)$$

$$(\lambda_2 \eta_2')' - \lambda_3 (\eta_2 - \eta_1) = 0, \quad (18b)$$

$$(\lambda_2 \zeta_2')' - \lambda_3 (\zeta_2 - \zeta_1) = 0. \quad (18c)$$

Ferner ergeben sich durch Nullsetzen der Koeffizienten der sechs Randwertvariationen  $\delta \xi_{1E}$  bis  $\delta \zeta_{2E}$  folgende Gleichungen:

$$P_{1x} + 2 \lambda_{1E} \xi_{1E}' - 2 \mu (\xi_{2E} - \xi_{1E}) = 0, \quad (19a)$$

$$P_{1y} + 2 \lambda_{1E} \eta_{1E}' - 2 \mu (\eta_{2E} - \eta_{1E}) = 0, \quad (19b)$$

$$P_{1z} + 2 \lambda_{1E} \zeta_{1E}' - 2 \mu (\zeta_{2E} - \zeta_{1E}) = 0, \quad (19c)$$

$$P_{2x} + 2 \lambda_{2E} \xi_{2E}' + 2 \mu (\xi_{2E} - \xi_{1E}) = 0, \quad (20a)$$

$$P_{2y} + 2 \lambda_{2E} \eta_{2E}' + 2 \mu (\eta_{2E} - \eta_{1E}) = 0, \quad (20b)$$

$$P_{2z} + 2 \lambda_{2E} \zeta_{2E}' + 2 \mu (\zeta_{2E} - \zeta_{1E}) = 0. \quad (20c)$$

Addiert man (19a) zu (20a), (19b) zu (20b) und (19c) zu (20c), so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} R_x + 2 \lambda_{1E} \xi_{1E}' + 2 \lambda_{2E} \xi_{2E}' &= 0, \\ R_y + 2 \lambda_{1E} \eta_{1E}' + 2 \lambda_{2E} \eta_{2E}' &= 0, \\ R_z + 2 \lambda_{1E} \zeta_{1E}' + 2 \lambda_{2E} \zeta_{2E}' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

mit:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x}, \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y}, \\ R_z &= P_{1z} + P_{2z}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Subtrahiert man (19a) von (20a), (19b) von (20b), (19c) von (20c), so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} S_x + 2 (\lambda_{2E} \xi_{2E}' - \lambda_{1E} \xi_{1E}') + 4 \mu (\xi_{2E} - \xi_{1E}) &= 0, \\ S_y + 2 (\lambda_{2E} \eta_{2E}' - \lambda_{1E} \eta_{1E}') + 4 \mu (\eta_{2E} - \eta_{1E}) &= 0, \\ S_z + 2 (\lambda_{2E} \zeta_{2E}' - \lambda_{1E} \zeta_{1E}') + 4 \mu (\zeta_{2E} - \zeta_{1E}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

mit:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= P_{2x} - P_{1x}, \\ S_y &= P_{2y} - P_{1y}, \\ S_z &= P_{2z} - P_{1z}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Damit ist eine symmetrische Darstellung erreicht. Addiert man (17a) zu (18a), (17b) zu (18b) und (17c) zu (18c), so folgt, nach einmaliger Integration, bei Berücksichtigung von (21):

$$\left. \begin{aligned} R_x + 2 \lambda_1 \xi_1' + 2 \lambda_2 \xi_2' &= 0, \\ R_y + 2 \lambda_1 \eta_1' + 2 \lambda_2 \eta_2' &= 0, \\ R_z + 2 \lambda_1 \zeta_1' + 2 \lambda_2 \zeta_2' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die Größen  $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$  bzw.  $\xi_2', \eta_2', \zeta_2'$  sind Komponenten von Einheitsvektoren in Richtung der Tangenten an die Holmkurve 1 bzw. 2 im Sinne von wachsendem  $\sigma$ . Die Gln. (25) sind demnach Gleichgewichtsbedingungen, und man kann die Größen  $(-2 \lambda_1)$  und  $(-2 \lambda_2)$  als Zugspannungen in den Holmen deuten.

Aus den Gln. (11) erhält man, wenn man einmal durchdifferenziert und dann der Reihe nach mit  $\xi, \eta, \zeta$  multipliziert, nach Addition, bei Beachtung von Gl. (12),

$$\xi \cdot \xi_1' + \eta \cdot \eta_1' + \zeta \cdot \zeta_1' = \xi \cdot \xi_2' + \eta \cdot \eta_2' + \zeta \cdot \zeta_2' = \cos \gamma. \quad (26)$$

$\xi, \eta, \zeta$  sind die Komponenten eines Einheitsvektors in Sprossenrichtung, von Holm 1 zu Holm 2 orientiert.  $\gamma$  bedeutet den für beide Holmkurven gleichen Winkel, den die Tangenten an die Holmkurven in Punkten mit gleichem  $\sigma$  mit der sie verbindenden Sprosse einschließt.

Es läßt sich nun, am raschesten durch eine zusätzliche statische Betrachtung, eine Beziehung zwischen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  herstellen.

Wegen des Knotengleichgewichtes in zwei durch eine Sprosse verbundenen Knoten muß gelten:  $\frac{d}{d\sigma} (2 \lambda_1 \sin \gamma) = 0$  und  $\frac{d}{d\sigma} (2 \lambda_2 \sin \gamma) = 0$ . Außerdem muß die Summe der 4 Fadenspannungskomponenten in der Sprossenrichtung für jedes Knotenpaar verschwinden:  $\frac{d}{d\sigma} [2 (\lambda_1 + \lambda_2) \cos \gamma] = 0$ . Eliminiert man  $\gamma$  aus diesen Gleichungen, so erhält man:  $\lambda_1' + \lambda_2' = 0$ , oder

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{konst.} \quad (27)$$



Aus Gl. (25) und (11) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1' &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( -\frac{1}{2} R_x - \alpha \lambda_2 \xi' \right), \\ \eta_1' &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( -\frac{1}{2} R_y - \alpha \lambda_2 \eta' \right), \\ \zeta_1' &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( -\frac{1}{2} R_z - \alpha \lambda_2 \zeta' \right), \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2' &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( -\frac{1}{2} R_x + \alpha \lambda_1 \xi' \right), \\ \eta_2' &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( -\frac{1}{2} R_y + \alpha \lambda_1 \eta' \right), \\ \zeta_2' &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( -\frac{1}{2} R_z + \alpha \lambda_1 \zeta' \right). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Führt man Gl. (28) und (29) in die Gleichungsgruppen (17) und (18) ein, so erhält man, bei Beachtung von Gl. (27) nach einfacher Umformung:

$$\left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} R_x - \alpha \lambda_1 \lambda_2 \xi' \right)' + \alpha (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda_3 \xi = 0, \quad (30a)$$

$$\left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} R_y - \alpha \lambda_1 \lambda_2 \eta' \right)' + \alpha (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda_3 \eta = 0, \quad (30b)$$

$$\left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} R_z - \alpha \lambda_1 \lambda_2 \zeta' \right)' + \alpha (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda_3 \zeta = 0. \quad (30c)$$

Durch Quadrieren und Addieren der Gl. (28) bzw. (29) erhält man, bei Verwendung von Gl. (7) und (8)

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = \alpha^2 \lambda_2^2 (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \alpha \lambda_2 (R_x \xi' + R_y \eta' + R_z \zeta') + \frac{1}{4} R^2, \quad (31a)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = \alpha^2 \lambda_1^2 (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - \alpha \lambda_1 (R_x \xi' + R_y \eta' + R_z \zeta') + \frac{1}{4} R^2 \quad (31b)$$

mit

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2. \quad (32)$$

Daraus ergeben sich die Beziehungen:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \frac{1}{4} R^2}{\alpha^2 (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}, \quad (33)$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = - \frac{R_x \xi' + R_y \eta' + R_z \zeta'}{\alpha (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}. \quad (34)$$

Für die weitere Behandlung wählen wir ein spezielles Koordinatensystem. Wir setzen  $R \neq 0$  voraus und lassen die  $z$ -Achse in die Richtung der Resultanten der eingepägten Kräfte  $R$  fallen. Dann wird  $R_x = R_y = 0$ ,  $R_z = R$  und die Gl. (31a), (31b) und (31c) nehmen bei Beachtung von (27), (33) und (34) folgende Formen an:

$$\Phi \cdot \xi'' - \Phi' \cdot \xi' = F \cdot \Phi^2 \cdot \xi, \quad (35a)$$

$$\Phi \cdot \eta'' - \Phi' \cdot \eta' = F \cdot \Phi^2 \cdot \eta, \quad (35b)$$

$$\frac{1}{K} (\Phi \cdot \zeta'' - \Phi' \cdot \zeta') = F \cdot \Phi^2 \cdot \zeta, \quad (35c)$$

mit:

$$\Phi = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2, \quad (36)$$

$$F = \frac{\alpha^2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \frac{1}{4} R^2} \lambda_3, \quad (37)$$

$$K = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \frac{1}{4} R^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} = \text{konst.} \quad (38)$$

Multipliziert man (35a), (35b) und (35c) der Reihe nach mit  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  und addiert die 3 Gleichungen, so erhält man wegen Gl. (9) und (36):

$$-\Phi^2 + \left(\frac{1}{K} - 1\right) \zeta (\Phi \cdot \zeta'' - \Phi' \cdot \zeta') = F \cdot \Phi^2$$

und daraus, wegen Gl. (35c), wenn man  $\Phi \neq 0$  voraussetzt:

$$F = -\frac{1}{1 - (1-K)\zeta^2}. \quad (39)$$

Führt man diesen Wert in die Gl. (35a), (35b) und (35c) ein und multipliziert sie der Reihe nach mit  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  und addiert, so erhält man wegen Gl. (12) und Gl. (36) nach einfacher Umformung:

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = -\frac{2\zeta \cdot \zeta'}{1-K-\zeta^2}. \quad (40)$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung:

$$\Phi = \omega^2 [1 - (1-K)\zeta^2], \quad (41)$$

worin  $\omega^2$  eine Integrationskonstante bedeutet. Für  $\omega^2 \neq 0$  kann  $\Phi$  nicht Null werden, da nach Gl. (33) für Zug in beiden Holmen  $(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \frac{1}{4}R^2 > 0$  und daher  $0 < K < 1$  sein muß, während nach Gl. (12)  $0 \leq \zeta^2 \leq 1$  ist.

Setzt man die Werte (39) und (41) in (35a), (35b) und (35c) ein, so folgt:

$$\xi'' + \frac{2\zeta \cdot \zeta'}{1-K-\zeta^2} \xi' + \omega^2 \xi = 0, \quad (42a)$$

$$\eta'' + \frac{2\zeta \cdot \zeta'}{1-K-\zeta^2} \eta' + \omega^2 \eta = 0, \quad (42b)$$

$$\zeta'' + \frac{2\zeta \cdot \zeta'^2}{1-K-\zeta^2} + K\omega^2 \cdot \zeta = 0. \quad (42c)$$

Gl. (42c) enthält nur die Variable  $\zeta$ . Wegen  $\zeta'' = \frac{1}{2} \frac{d(\zeta')^2}{d\zeta}$  ist sie eine lineare Differentialgleichung für  $\zeta'^2$ . Die Lösung für  $\zeta'$  lautet:

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{d\sigma} = \sqrt{A \left( \frac{1}{1-K} - \zeta^2 \right)^2 - K\omega^2 \left( \frac{1}{1-K} - \zeta^2 \right)}. \quad (43)$$

Hierin ist  $A$  eine weitere Integrationskonstante. Man erhält aus (43)

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{A \left( \frac{1}{1-K} - \zeta^2 \right)^2 - K\omega^2 \left( \frac{1}{1-K} - \zeta^2 \right)}} = \sigma.$$

$\zeta$  ist also eine elliptische Funktion von  $\sigma$ . Um  $\xi$  und  $\eta$  zu berechnen, müßte diese elliptische Funktion in die Gln. (42a) und (42b) eingesetzt werden, so daß die weitere Behandlung mathematisch sehr schwierig wird.

Wir beschränken uns daher auf einfacher zu berechnende Spezialfälle. Aus Gl. (42c) erkennt man, daß  $\zeta = 0$  eine Sonderlösung darstellt:

Gln. (42a) und (42b) gehen dann über in:

$$\xi'' + \omega^2 \xi = 0, \quad (44a)$$

$$\eta'' + \omega^2 \eta = 0 \quad (44b)$$

mit den für  $\omega \neq 0$  geltenden Lösungen:

$$\xi = C_{11} \cos \omega \sigma + C_{12} \sin \omega \sigma, \quad (45a)$$

$$\eta = C_{21} \cos \omega \sigma + C_{22} \sin \omega \sigma. \quad (45b)$$

Aus Gl. (12) folgt dann  $\xi^2 + \eta^2 = 1$  und daher ist:

$$C_{11}^2 + C_{12}^2 = C_{21}^2 + C_{22}^2 = 1, \quad (46a)$$

$$C_{11} C_{12} + C_{21} C_{22} = 0. \quad (46b)$$

Wegen  $\zeta = 0$  müssen bei dieser Lösung alle Sprossen parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene liegen und wir wählen die  $x$ -Achse speziell so, daß sie in die erste (festgehaltene) Sprosse fällt.

Es gilt dann: für  $\sigma = 0 \dots \xi = 1, \eta = 0$ .

Damit liefert (45a) und (45b):  $C_{11} = 1$  und  $C_{21} = 0$ . Aus (46b) folgt dann:  $C_{12} = 0$  und aus (46a):  $C_{22} = 1$ . Damit erhält man aus (45a) und (45b)

$$\xi = \cos \omega \sigma, \quad (47a)$$

$$\eta = \sin \omega \sigma, \quad (47b)$$

$$\zeta = 0. \quad (47c)$$

Aus Gl. (41) ergibt sich:

$$\Phi = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \omega^2. \quad (48)$$

Aus Gl. (34) erkennt man:  $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$ ; wir setzen also wegen (27)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \text{konst.} \quad (49)$$

Die Holmspannungen sind nun gleich groß und konstant. Aus Gl. (33) und (48) ergibt sich für  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{(+)}{-} \frac{R}{2 \sqrt{4 - x^2 \omega^2}}. \quad (50)$$

(Das obere Vorzeichen entspricht der Druckspannung in den Holmen.)

Durch Integration der Gl. (28) und (29) erhält man, bei Beachtung von (47a), (47b) und (47c):

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{\alpha}{2} \cos \omega \sigma, \\ \eta_1 &= -\frac{\alpha}{2} \sin \omega \sigma, \\ \zeta_1 &= -\frac{R}{4 \lambda} \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{\alpha}{2} \cos \omega \sigma, \\ \eta_2 &= \frac{\alpha}{2} \sin \omega \sigma, \\ \zeta_2 &= -\frac{R}{4 \lambda} \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Die Bedingungen Gl. (7) und (8) sind erfüllt. Außerdem sind die Integrationskonstanten so bestimmt, daß für  $\sigma = 0$   $\xi_1 = -\frac{\alpha}{2}$ ,  $\eta_1 = \zeta_1 = 0$  und  $\xi_2 = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\eta_2 = \zeta_2 = 0$  ist.

Die Holmkurven sind also Schraubenlinien, deren Achse mit der Resultanten  $R$  der eingepprägten Kräfte zusammenfällt.

Die Gln. (23) lauten für diesen Spezialfall:

$$S_x - 2 \lambda \alpha \omega \sin \omega + 4 \mu \alpha \cos \omega = 0, \quad (53)$$

$$S_y + 2 \lambda \alpha \omega \cos \omega + 4 \mu \alpha \sin \omega = 0, \quad (54)$$

$$S_z = 0. \quad (55)$$



Gl. (55) ist eine notwendige Bedingung für die Lösung  $\zeta = 0$ . Die äußere Belastung besteht in diesem Fall aus einer Kraftschraube, deren Achse mit der Achse der Schraubenlinien der Holmkurven zusammenfällt. Schreibt man nun:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} \quad (56)$$

und setzt

$$S_x = S \cdot \cos \beta, \quad (57)$$

$$S_y = S \cdot \sin \beta, \quad (58)$$

so ergeben sich aus den Gln. (53), (54) und (55) bei Beachtung von (50) die Beziehungen:

$$\sin(\beta - \omega) = \frac{R}{S} \frac{\alpha \omega}{\sqrt{4 - \alpha^2 \omega^2}}, \quad (59)$$

$$\mu = -\frac{S}{4\alpha} \cos(\beta - \omega). \quad (60)$$

Die Gl. (59) ist eine Eigenwertsgleichung für  $\omega$ . Da  $|\omega| < \frac{2}{\alpha}$  sein muß, gibt es für  $\alpha \neq 0$  nur endlich viele Eigenwerte (Gleichgewichtslagen). Ihre Anzahl hängt wesentlich vom Format der Strickleiter ab. Je größer ihre Länge wird im Verhältnis zu ihrer Breite, desto mehr Gleichgewichtslagen sind bei gegebenem  $\frac{R}{S}$  und  $\beta$  möglich. In Abb. 1 wurde für die angegebenen Festwerte von  $\alpha$ ,  $\frac{S}{R}$  und  $\beta$  die Eigenwerte auf graphischem Weg ermittelt, durch Auftragen der Funktionen  $\sin(\beta - \omega)$  und  $\frac{R}{S} \frac{\alpha \omega}{\sqrt{4 - \alpha^2 \omega^2}}$  in Abhängigkeit von  $\omega$ .

Es sollen noch zwei Sonderfälle untersucht werden. Zunächst fragen wir nach der Gleichgewichtsform für  $R \rightarrow 0$ . In diesem Fall ist nach Gl. (50) entweder  $\lambda = 0$ , das heißt die Strickleiter wird spannungslos, oder  $\omega$  nimmt den speziellen Wert

$$\omega = \pm \frac{2}{\alpha} = \vartheta \frac{2}{\alpha} \quad (61)$$

an ( $\vartheta$  kann nur die beiden Werte  $+1$  und  $-1$  annehmen). Wir wollen nur den letzteren Fall behandeln.

Die Gl. (47a), (47b) und (47c) ergeben dann

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \cos\left(\frac{2}{\alpha} \sigma\right), \\ \eta &= \vartheta \sin\left(\frac{2}{\alpha} \sigma\right), \\ \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Abb. 1. Ermittlung der Gleichgewichtslagen für  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{S}{R} = \frac{1}{7}$ ,  $\beta = \frac{5\pi}{12}$  und Kennzeichnung der Art des Gleichgewichtes

Die Gl. (51) und (52) gehen über in:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{2}{\alpha} \sigma\right), \\ \eta_1 &= -\frac{\alpha}{2} \vartheta \sin\left(\frac{2}{\alpha} \sigma\right), \\ \zeta_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{2}{\alpha} \sigma\right), \\ \eta_2 &= \frac{\alpha}{2} \vartheta \cdot \sin\left(\frac{2}{\alpha} \sigma\right), \\ \zeta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Hier liegen die Holmkurven auf einem Kreis vom Radius  $\frac{\alpha}{2}$ . Damit wird aus Gl. (53) und (54), bei Verwendung von (57) und (58):

$$S \cos \beta - 4 \lambda \sin \left( \frac{2}{\alpha} \right) + 4 \mu \alpha \cos \left( \frac{2}{\alpha} \right) = 0, \quad (65)$$

$$S \sin \beta + 4 \lambda \vartheta \cos \left( \frac{2}{\alpha} \right) + 4 \mu \alpha \vartheta \sin \left( \frac{2}{\alpha} \right) = 0. \quad (66)$$

Daraus ergibt sich:

$$\lambda = \frac{S}{4} \sin \left( \vartheta \beta - \frac{2}{\alpha} \right), \quad (67)$$

$$\mu = -\frac{S}{4 \alpha} \cos \left( \vartheta \beta - \frac{2}{\alpha} \right). \quad (68)$$

Da nur Zugspannungen in den Holmen auftreten dürfen, muß also  $\sin \left( \vartheta \beta - \frac{2}{\alpha} \right) < 0$  sein. Ist dies weder für  $\vartheta = +1$  noch für  $\vartheta = -1$  zu erreichen, dann ist nur der spannungslose Zustand möglich.

Ein zweiter Sonderfall liegt für  $\omega = 0$ ,  $R \neq 0$  vor. Für ihn lauten die Differentialgleichungen (44a) und (44b)  $\xi'' = \eta'' = 0$ ; und ihre Lösungen:  $\xi = c_{11} \sigma + c_{12}$ ,  $\eta = c_{21} \sigma + c_{22}$ ,  $\zeta = c_{31} \sigma + c_{32}$ . Wegen der Randbedingung am festgehaltenen Ende und wegen Gl. (12) ergibt sich die Lösung:

$$\xi = 1, \quad \eta = \zeta = 0. \quad (69)$$

Aus den Gl. (28) und (29) erhält man schließlich, bei Beachtung der Randbedingungen für  $\eta = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{2} \alpha, \\ \eta_1 &= 0, \\ \zeta_1 &= \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{1}{2} \alpha, \\ \eta_2 &= 0, \\ \zeta_2 &= \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Die Strickleiter hat also nun die Form eines Rechteckes. Aus Gl. (50) erhält man:

$$\lambda = -\frac{R}{2}. \quad (72)$$

Die Gln. (53) und (54) gehen, bei Benutzung von (57) und (58) über in:

$$\left. \begin{aligned} S \cos \beta + 4 \mu \alpha &= 0, \\ S \sin \beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Für  $S \neq 0$  besteht also nur Gleichgewicht entweder für  $\beta = 0$  oder für  $\beta = \pi$ . Es ist demnach:

$$\cos \beta = \pm 1 = \vartheta \quad (74)$$

und

$$\mu = \frac{\vartheta S}{4 \alpha}. \quad (75)$$

## V. Stabilitätsuntersuchung

Um zu entscheiden, welche der gefundenen Gleichgewichtslagen stabil sind, gehen wir von der zweiten Variation nach Gl. (15) aus. Nach Durchführung geeigneter partieller Integrationen erhält man, bei Verwendung von Gl. (11):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2l} \delta^2 U = & - \{ \alpha^2 \mu (\delta \xi_E^2 + \delta \eta_E^2 + \delta \zeta_E^2) + 2 \alpha^2 \delta \mu (\xi_E \delta \xi_E + \eta_E \delta \eta_E + \zeta_E \delta \zeta_E) + \\
& + \lambda_{1E} (\delta \xi_{1E} \cdot \delta \xi_{1E}' + \delta \eta_{1E} \cdot \delta \eta_{1E}' + \delta \zeta_{1E} \cdot \delta \zeta_{1E}') + \lambda_{2E} (\delta \xi_{2E} \delta \xi_{2E}' + \delta \eta_{2E} \delta \eta_{2E}' + \\
& + \delta \zeta_{2E} \delta \zeta_{2E}') \} + \int_0^1 \{ [(\lambda_1 \delta \xi_1')' \delta \xi_1 + (\lambda_1 \delta \eta_1')' \delta \eta_1 + (\lambda_1 \delta \zeta_1')' \delta \zeta_1] + [(\lambda_2 \delta \xi_2')' \delta \xi_2 + \\
& + (\lambda_2 \delta \eta_2')' \delta \eta_2 + (\lambda_3 \delta \zeta_2')' \delta \zeta_2] - \lambda_3 [\delta \xi_1^2 + \delta \eta_1^2 + \delta \zeta_1^2 + \delta \xi_2^2 + \delta \eta_2^2 + \delta \zeta_2^2 - \\
& - 2 (\delta \xi_1 \delta \xi_2 + \delta \eta_1 \delta \eta_2 + \delta \zeta_1 \delta \zeta_2)] + 2 \lambda_1 (\xi_1' \delta \xi_1' + \eta_1' \delta \eta_1' + \zeta_1' \delta \zeta_1') + \\
& + 2 \delta \lambda_2 (\xi_2' \delta \xi_2' + \eta_2' \delta \eta_2' + \zeta_2' \delta \zeta_2') + 2 \alpha^2 \delta \lambda_3 (\xi \delta \xi + \eta \delta \eta + \zeta \delta \zeta) \} d\sigma. \quad (76)
\end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der Koeffizienten der Linearform in  $\delta \xi_1$ ,  $\delta \eta_1$ ,  $\delta \zeta_1$ ,  $\delta \xi_2$ ,  $\delta \eta_2$ ,  $\delta \zeta_2$ ,  $\delta \lambda_1$ ,  $\delta \lambda_2$ ,  $\delta \lambda_3$  im Integranden von Gl. (76) erhalten wir die Jacobischen Gleichungen des Sekundärproblems.

$$(\lambda_1 \delta \xi_1')' + \lambda_3 (\delta \xi_2 - \delta \xi_1) = 0, \quad (77a)$$

$$(\lambda_1 \delta \eta_1')' + \lambda_3 (\delta \eta_2 - \delta \eta_1) = 0, \quad (77b)$$

$$(\lambda_1 \delta \zeta_1')' + \lambda_3 (\delta \zeta_2 - \delta \zeta_1) = 0, \quad (77c)$$

$$(\lambda_2 \delta \xi_2')' - \lambda_3 (\delta \xi_2 - \delta \xi_1) = 0, \quad (78a)$$

$$(\lambda_2 \delta \eta_2')' - \lambda_3 (\delta \eta_2 - \delta \eta_1) = 0, \quad (78b)$$

$$(\lambda_2 \delta \zeta_2')' - \lambda_3 (\delta \zeta_2 - \delta \zeta_1) = 0. \quad (78c)$$

$$\xi \delta \xi + \eta \delta \eta + \zeta \delta \zeta = 0, \quad (79)$$

$$\xi_1' \delta \xi_1' + \eta_1' \delta \eta_1' + \zeta_1' \delta \zeta_1' = 0, \quad (80)$$

$$\xi_2' \delta \xi_2' + \eta_2' \delta \eta_2' + \zeta_2' \delta \zeta_2' = 0. \quad (81)$$

Wie der Vergleich von Gl. (77) und (78) mit den Gl. (17) und (18) zeigt, gelten für  $\delta \xi_1$ ,  $\delta \eta_1$ ,  $\delta \zeta_1$ ,  $\delta \xi_2$ ,  $\delta \eta_2$ ,  $\delta \zeta_2$  dieselben Differentialgleichungen wie für die Größen  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\zeta_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\eta_2$ ,  $\zeta_2$ .

Wir wollen diese Gleichungen nur für den Spezialfall der schraubensymmetrischen Lösung weiter behandeln. Hier gilt  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \text{konst.}$  und wie der Vergleich von (30a) und (42a) lehrt:

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = -\frac{1}{2} \omega^2. \quad (82)$$

Subtrahiert man (77a) von (78a), (77b) von (78b), (77c) von (78c), so erhält man, bei Beachtung von (82) und (11):

$$\left. \begin{aligned}
(\delta \xi)'' + \omega^2 \delta \xi &= 0, \\
(\delta \eta)'' + \omega^2 \delta \eta &= 0, \\
(\delta \zeta)'' + \omega^2 \delta \zeta &= 0.
\end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Für  $\omega \neq 0$  erhalten wir daraus, da  $\delta \xi$ ,  $\delta \eta$ ,  $\delta \zeta$  für  $\sigma = 0$  verschwinden müssen:

$$\delta \xi = \varepsilon_1 \sin \omega \sigma, \quad (84a)$$

$$\delta \eta = \varepsilon_2 \sin \omega \sigma, \quad (84b)$$

$$\delta \zeta = \varepsilon_3 \sin \omega \sigma. \quad (84c)$$

Hierin bedeuten  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  sehr kleine Festwerte. Aus Gl. (79) folgt dann, bei Verwendung von (47a), (47b) und (47c):  $\varepsilon_1 \sin \omega \sigma \cdot \cos \omega \sigma + \varepsilon_2 \sin^2 \omega \sigma = 0$ . Da diese Gleichung für alle  $\sigma$  zwischen 0 und 1 gelten muß, folgt:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Es ist also:

$$\left. \begin{aligned}
\delta \xi &= 0, \\
\delta \eta &= 0, \\
\delta \zeta &= \varepsilon \sin \omega \sigma,
\end{aligned} \right\} \quad (85)$$

wenn man  $\varepsilon_3 = \varepsilon$  setzt.



Addiert man (77a) zu (78a), (77b) zu (78b) und (77c) zu (78c), so ergeben sich die Gleichungen:

$$\delta\xi_1'' + \delta\xi_2'' = 0, \quad \delta\eta_1'' + \delta\eta_2'' = 0, \quad \delta\zeta_1'' + \delta\zeta_2'' = 0.$$

Da für  $\sigma = 0$  die  $\delta\xi_1$ ,  $\delta\eta_1$ ,  $\delta\zeta_1$ ,  $\delta\xi_2$ ,  $\delta\eta_2$ ,  $\delta\zeta_2$  verschwinden müssen, folgt:

$$\left. \begin{aligned} \delta\xi_1 + \delta\xi_2 &= \nu_1 \sigma, \\ \delta\eta_1 + \delta\eta_2 &= \nu_2 \sigma, \\ \delta\zeta_1 + \delta\zeta_2 &= \nu_3 \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Auch hier bedeuten  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  sehr kleine Festwerte. Aus (86) und (85) folgt dann, bei Beachtung von Gl. (11):

$$\left. \begin{aligned} \delta\xi_1 &= \frac{1}{2} \nu_1 \sigma, \\ \delta\eta_1 &= \frac{1}{2} \nu_2 \sigma, \\ \delta\zeta_1 &= \frac{1}{2} (\nu_3 \sigma - \alpha \varepsilon \sin \omega \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\xi_2 &= \frac{1}{2} \nu_1 \sigma, \\ \delta\eta_2 &= \frac{1}{2} \nu_2 \sigma, \\ \delta\zeta_2 &= \frac{1}{2} (\nu_3 \sigma + \alpha \varepsilon \sin \omega \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Führt man diese Werte in die Gln. (80) und (81) ein, so erhält man bei Verwendung der Gln. (51) und (52):  $\nu_1 = \nu_3 = 0$ ,  $\nu_2 = \frac{R \varepsilon}{2 \lambda}$ . Damit nehmen die Gln. (87) und (88) die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \delta\xi_1 &= 0, \\ \delta\eta_1 &= \frac{\varepsilon R}{4 \lambda} \sigma, \\ \delta\zeta_1 &= -\frac{\varepsilon \alpha}{2} \sin \omega \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\xi_2 &= 0, \\ \delta\eta_2 &= \frac{\varepsilon R}{4 \lambda} \sigma, \\ \delta\zeta_2 &= \frac{\varepsilon \alpha}{2} \sin \omega \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Für die zweite Variation verbleibt gemäß Gl. (76), bei Beachtung von Gl. (79), der Ausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l} \delta^2 U &= -\{ \alpha^2 \mu (\delta\xi_E^2 + \delta\eta_E^2 + \delta\zeta_E^2) + \lambda (\delta\xi_{1E} \delta\xi_{1E'} + \delta\eta_{1E} \delta\eta_{1E'} + \delta\zeta_{1E} \delta\zeta_{1E'} + \\ &\quad + \delta\xi_{2E} \delta\xi_{2E'} + \delta\eta_{2E} \delta\eta_{2E'} + \delta\zeta_{2E} \delta\zeta_{2E'}) \}. \end{aligned} \quad (91)$$

Führt man hierin die Werte von Gl. (85), (89) und (90) ein und ersetzt  $\lambda$  und  $\mu$  durch die Ausdrücke (50) und (60), so ergibt sich:

$$\frac{1}{2l \varepsilon^2} \delta^2 U = \frac{\alpha S}{4} \cos(\beta - \omega) \cdot \sin^2 \omega + \frac{R}{4} \sqrt{4 - \alpha^2 \omega^2} + \frac{R \alpha^2 \omega}{8 \sqrt{4 - \alpha^2 \omega^2}} \cdot \sin 2\omega. \quad (92)$$

Bei stabilem Gleichgewicht muß der rechts stehende Ausdruck positiv sein. Hebt man den stets positiven Ausdruck  $\frac{R}{4} \sqrt{4 - \alpha^2 \omega^2}$  heraus, so verbleibt, wenn man Gl. (59) verwendet, das folgende Stabilitätskriterium:

$$1 + \alpha \frac{S}{R} \frac{\sin \beta \cdot \sin \omega}{\sqrt{4 - \alpha^2 \omega^2}} > 0. \quad (93)$$

Die in Abb. 1. ermittelten Gleichgewichtslagen wurden gemäß Gl. (93) auf ihre Stabilität untersucht und das Ergebnis in der Abbildung festgehalten.

An dem Strickleitermodell von Wunderlich konnte die Gültigkeit von Gl. (93) nachgewiesen werden.

Es sollen nun noch die Stabilitätsverhältnisse für die Sonderfälle  $R \rightarrow 0$  und  $\omega = 0$  untersucht werden. Nach Gl. (61) wird im ersten Fall, für  $\lambda \neq 0$ ,  $\omega = \vartheta \frac{2}{\alpha}$ . Demnach liefern die Gln. (85):

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi &= 0, \\ \delta \eta &= 0, \\ \delta \zeta &= \vartheta \varepsilon \sin \left( \frac{2}{\alpha} \sigma \right). \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Aus den Gln. (87) und (88) ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi_1 &= \frac{1}{2} \nu_1 \sigma, \\ \delta \eta_1 &= \frac{1}{2} \nu_2 \sigma, \\ \delta \zeta_1 &= \frac{1}{2} \left[ \nu_3 \sigma - \varepsilon \alpha \vartheta \sin \left( \frac{2}{\alpha} \sigma \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi_2 &= \frac{1}{2} \nu_1 \sigma, \\ \delta \eta_2 &= \frac{1}{2} \nu_2 \sigma, \\ \delta \zeta_2 &= \frac{1}{2} \left[ \nu_3 \sigma + \varepsilon \alpha \vartheta \sin \left( \frac{2}{\alpha} \sigma \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Der Unterschied gegen früher besteht nun darin, daß hier nach Gl. (63) und (64)  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$  ist. Führt man also die Werte nach Gl. (95) und (96) in die Bedingungen (80) und (81) ein, so ergibt sich:  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ , während  $\nu_3 = \nu$  offen bleibt. Man erhält damit:

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi_1 &= 0, \\ \delta \eta_1 &= 0, \\ \delta \zeta_1 &= \frac{1}{2} \left[ \nu \sigma - \alpha \varepsilon \sin \left( \frac{2}{\alpha} \sigma \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi_2 &= 0, \\ \delta \eta_2 &= 0, \\ \delta \zeta_2 &= \frac{1}{2} \left[ \nu \sigma + \alpha \varepsilon \sin \left( \frac{2}{\alpha} \sigma \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Trägt man die Werte in Gl. (91) ein und beachtet die Ausdrücke (67) und (68), so ergibt sich:

$$\frac{1}{2l} \delta^2 U = \frac{\varepsilon^2 S}{4} \left[ \alpha \sin \left( \frac{2}{\alpha} \right) \sin (\vartheta \beta) + \left( \frac{\nu^2}{\varepsilon^2} \right) \sin \left( \vartheta \beta - \frac{2}{\alpha} \right) \right]. \quad (99)$$

Da hierin  $\frac{\nu^2}{\varepsilon^2}$  jeden beliebigen positiven Wert einschließlich der Null annehmen kann, ist hier die Stabilität an das Bestehen der beiden Bedingungen geknüpft:

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{2}{\alpha}\right) \cdot \sin(\vartheta\beta) &> 0, \\ \sin\left(\vartheta\beta - \frac{2}{\alpha}\right) &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Im Modell läßt sich dieser Fall allerdings nicht überprüfen, da er sich wegen der Undurchdringlichkeit der Sprossen nicht realisieren läßt.

Im Sonderfall  $\omega = 0$  gelten nach Gl. (83) die Differentialgleichungen

$$(\delta\xi)'' = (\delta\eta)'' = (\delta\zeta)'' = 0.$$

Da für  $\sigma = 0$   $\delta\xi = \delta\eta = \delta\zeta = 0$  ist, lauten die Lösungen:  $\delta\xi = \varepsilon_1 \sigma$ ,  $\delta\eta = \varepsilon_2 \sigma$ ,  $\delta\zeta = \varepsilon_3 \sigma$ . Wegen Gl. (79) ergibt sich, bei Beachtung von Gl. (69):  $\varepsilon_1 = 0$  und damit  $\delta\xi = 0$ . Es gelten ferner auch hier die Gl. (86). Es ergibt sich daher, bei Beachtung von Gl. (11):

$$\delta\xi_1 = \frac{1}{2} \nu_1 \sigma, \quad \delta\eta_1 = \frac{1}{2} (\nu_2 - \alpha \varepsilon_2) \sigma, \quad \delta\zeta_1 = \frac{1}{2} (\nu_3 - \alpha \varepsilon_3) \sigma;$$

$$\delta\xi_2 = \frac{1}{2} \nu_1 \sigma, \quad \delta\eta_2 = \frac{1}{2} (\nu_2 + \alpha \varepsilon_2) \sigma, \quad \delta\zeta_2 = \frac{1}{2} (\nu_3 + \alpha \varepsilon_3) \sigma.$$

Die Bedingungen (80) und (81) führen auf  $\nu_3 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 0$  und damit auf:

$$\delta\zeta_1 = \delta\zeta_2 = 0.$$

Setzt man diese Werte in die Gl. (91) ein und beachtet die Gln. (72), (73), (74) und (75), so erhält man, wenn man  $\frac{1}{2} (\nu_1^2 + \nu_2^2) = \nu^2$  und  $\varepsilon_2 = \varepsilon$  setzt:

$$\frac{1}{2l} \delta^2 U = \varepsilon^2 \left( \vartheta \frac{S\alpha}{4} + \frac{R\alpha^2}{8} \right) + \frac{R}{4} \nu^2.$$

Da  $\nu^2$  unabhängig von  $\varepsilon^2$  ist, wird  $\delta^2 U$  am kleinsten für  $\nu^2 = 0$  und man erhält das Stabilitätskriterium:

$$\vartheta + \frac{R}{S} \frac{\alpha}{2} > 0. \quad (101)$$

Nun ist für  $\beta = 0$   $\vartheta = +1$  und für  $\beta = \pi$   $\vartheta = -1$  zu setzen. Für  $\beta = 0$  besteht also immer Stabilität, für  $\beta = \pi$  jedoch nur dann, wenn:

$$\frac{R}{S} > \frac{2}{\alpha} = \frac{2l}{a}$$

ist. Das bedeutet, daß sich die Wirkungslinien der beiden eingepprägten Kräfte, die an der rechteckigen Strickleiter nach Abb. 2 angreifen, in einem Abstand vom Angriffspunkt schneiden müssen, der größer ist als die Länge der Strickleiter.

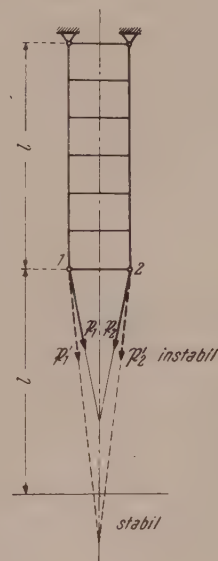


Abb. 2. Gleichgewicht und Stabilität für den Fall  $\omega = 0$

(Eingegangen am 9. März 1956)



# Zur Bestimmung bogengleicher algebraischer Kurven zu Beginn des 18. Jahrhunderts

Von J. E. Hofmann, Ichenhausen

Mit 2 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Joh. Bernoulli bestimmt (1702, Druck 1705) durch berührende Parallelverschiebung einer starren ebenen Kurve längs einer festen Kurve bogengleiche algebraische Kurven verschiedener Gestalt; Leibniz leistet Gleiches (1704) durch Spiegeln einer Geraden-schar an einer festen Kurve. Außerdem nähert B. vermittlels seines Verfahrens (1707) den Ellipsenumfang iterierend durch Kreisumfänge an und entwickelt hieraus eine mit der Kreisteilung zusammenhängende Konstruktion; ferner findet er schrittweise Näherungskonstruktionen zur Arkuifikation einer Strecke.

1. Um das Jahr 1701 wurde Joh. Bernoulli, der damals in Groningen lehrte, von einem uns unbekannten niederländischen Mathematiker aufgefordert, ein Verfahren anzugeben, vermittlels dessen sich algebraische Kurven finden lassen, die mit einer gegebenen bogengleich sind, jedoch gestaltlich von ihr abweichen. Bernoulli interessierte sich für das Problem, da er in den vorhergehenden Jahren schon des öfteren über die Rektifikation algebraischer Kurven veröffentlicht hatte<sup>1</sup>. Er fand eine sehr anschauliche bewegungsgeometrische Methode — den sog. *motus reptorius* — und stellte das Problem im Frühjahr 1703 zur allgemeinen Diskussion<sup>2</sup>. Lösungen erwartete er bis zu Anfang des Jahres 1704. Im Mai 1703 machte er Leibniz brieflich auf das Problem aufmerksam<sup>3</sup> und deutete an, daß er ein allgemeines Verfahren besitze, worin frühere Ergebnisse<sup>4</sup> als Spezialfälle enthalten seien. Er könne etwa die Rektifikation sehr komplizierter Kurven auf die der Ellipse oder Hyperbel zurückführen.

2. Leibniz antwortete<sup>5</sup>, er könne das Problem auf zahllose Weisen lösen und vermutete, es handle sich um eine bedeutende Angelegenheit. Nun erbat Bernoulli das Verfahren Leibnizens, um es mit seinem eigenen vergleichen zu können<sup>6</sup>, und erhielt

Verwendete Abkürzungen:

B = Joh. Bernoulli: *Opera I*, ed. G. Cramer. Lausanne/Genf 1742.

C = G. G. Leibnitii et J. Bernoullii *Commercium philosophicum et mathematicum II*: ed. G. F. M. M. S. de Castillon. Lausanne/Genf 1745.

L = Leibniz: *Mathematische Schriften III*, ed. C. I. Gerhardt. Halle 1856.

L' = Leibniz: *Mathematische Schriften VII*, ed. C. I. Gerhardt. Halle 1863.

AE = *Acta eruditorum*: Leipzig seit 1682.

JS = *Journal des sçavans*: Paris seit 1665.

MB = *Miscellanea Berolinensia I*: Berlin 1710.

PT = *Philosophical Transactions*: London seit 1665.

B/L = Brief von Bernoulli an Leibniz, L/B = Brief von Leibniz an Bernoulli.

<sup>1</sup> AE VIII 1695 (B, S. 142/44): Bestimmung zweier Kurvenbögen, deren Summe oder Differenz durch einen Kreisbogen gemessen wird. — AE VI 1698 (B, S. 242/49): Algebraische Bestimmung von Bögen einer gegebenen Parabel, die in gegebenem ganzzahligem Verhältnis stehen. — AE X 1698 (B, S. 249/53): Wird eine ebene Kurve aus  $y(x)$  gegeben und ihrem

laufenden Punkt  $P(x; y)$  der Punkt  $II \left( \xi = x y^{13}; \eta = 3 x y^{12} - \frac{1}{2} \int_a^x y^{12} dx \right)$  zugeordnet, dann

wird die Summe der von  $P$  und  $II$  beschriebenen Bögen durch den Ausdruck  $x \sqrt{1 + y^{12}}$  gemessen.

<sup>2</sup> JS Nr. 7 vom 12. II. 1703 (B, S. 406).

<sup>3</sup> B/L, 5. V. 1703 (L, S. 718/20).

<sup>4</sup> Gemeint ist das Ergebnis der Abh. AE VIII 1695<sup>1</sup>.

<sup>5</sup> L/B, 3. VII. 1703 (C, S. 93 = L, S. 721).

<sup>6</sup> B/L, 29. IX. 1703 (L, S. 723).

eine Skizze<sup>7</sup>, die mit einem früheren Ergebnis Tschirnhausens<sup>8</sup> und dessen Weiterbildung durch Leibniz<sup>9</sup> zusammenhängt: Leibniz nimmt an, daß in der Ebene drei Kurven  $\mathfrak{A}$  (laufender Punkt  $A$ ),  $\mathfrak{B}$  (laufender Punkt  $B$ ) und  $\mathfrak{C}$  (laufender Punkt  $C$ ) liegen. Schneidet sich die Tangente des Punktes  $A$  auf  $\mathfrak{A}$  mit der Tangente des Punktes  $B$  auf  $\mathfrak{B}$  bezüglich so in  $C$ , daß die eine Halbierende des  $\sphericalangle ACB$  den Bogen berührt, so gilt entsprechend für eine andere Lage zusammengehöriger Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ :  $\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BB'} = \overline{AA'} + \overline{A'C'} + \overline{C'B'}$ , also  $\overline{AA'} - \overline{BB'} = (\overline{AC} + \overline{CB}) - (A'C' + C'B')$ . Sind die Kurven  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  algebraisch rektifizierbar, so ist also die Differenz ihrer Bögen  $\overline{AA'}$  und  $\overline{BB'}$  geradlinig ausdrückbar. Ist  $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{A'C'} + \overline{C'B'}$ , dann sind die Kurven  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  bogengleich aufeinander bezogen.

Bernoulli kam mit dieser Andeutung nicht sogleich zurecht<sup>10</sup>, erhielt von Leibniz die nötigen Ergänzungen über die Konstruktion von  $\mathfrak{B}$  aus gegebenem  $\mathfrak{A}$ <sup>11</sup>, hatte aber noch mancherlei recht wohlbegründete Bedenken<sup>12</sup>.

3. Inzwischen hatte der Schotte Craig, der sich schon seit 1685 unablässig mit Problemen der algebraischen Integration algebraischer Funktionen beschäftigte<sup>13</sup>, eine Lösung des Bernoullischen Problems versucht<sup>14</sup>, die jedoch nur spezielle Fälle in sich schließt. Craig geht aus von einer algebraischen Kurve  $\eta(\xi)$ , setzt  $dx^2 + dy^2 = d\xi^2 + d\eta^2$  und  $dx = d\xi - \varphi(\xi)d\xi$  und bestimmt  $\varphi(\xi)$  so, daß sich  $dx$  und  $dy$  integrieren lassen. Sein Aufsatz gab Bernoulli den erwünschten Anlaß zur Mitteilung seines eigenen Verfahrens<sup>15</sup>. Er setzt voraus, daß in der Ebene eine feste algebraische Kurve  $\mathfrak{R}_1$  mit dem laufenden Punkt  $P_1(x_1; y_1)$  gegeben ist, an der eine starre, jedoch als Ganzes bewegliche algebraische Kurve  $\mathfrak{R}_2$  mit dem laufenden Punkt  $P_2(x_2; y_2)$  parallel zu sich selbst berührend verschoben wird. Dann beschreibt nach Bernoulli ein mit der beweglichen algebraischen Kurve fest verbundener Punkt  $P$  eine neue algebraische Kurve  $K$  mit dem laufenden Punkt  $II(\xi; \eta)$ , deren Bogen je nach Art der Berührung entweder gleich der Summe oder gleich der Differenz der entsprechenden Bögen auf  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  ist. Bernoulli gibt einen geometrischen Beweis. Wir gestalten ihn dadurch modern, daß wir die kartesischen Koordinaten

<sup>7</sup> L/B, 3. I. 1704 (C, S. 102/03 = L, S. 732/34). Ein eingehendes MS, das jedoch nicht an Bernoulli ging, steht in L, S. 734/36.

<sup>8</sup> *Medicina mentis*. Amsterdam 1686, S. 72 = <sup>2</sup>1695, S. 95, 98: In einer Ebene liegen zwei Kurven  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ , um die ein lose geschlungener, völlig biegsamer Faden fester Länge von Punkt  $O_1$  auf  $\mathfrak{R}_1$  zum Punkt  $O_2$  auf  $\mathfrak{R}_2$  führt. Wird der Faden durch einen beweglichen Zeichenstift  $P$  gespannt und ist  $T_1$  der Berührungspunkt des Fadenstückes  $T_1P$  mit  $\mathfrak{R}_1$ ,  $T_2$  der Berührungspunkt des Fadenstückes  $T_2P$  mit  $\mathfrak{R}_2$ , dann halbiert die Tangente an den von  $P$  beschriebenen Kurvenbogen einen der Winkel zwischen  $T_1P$  und  $T_2P$ .

<sup>9</sup> AE I 1689 (L' VII, S. 329/31). Hier gibt Leibniz in der Ebene einen leuchtenden Punkt  $A$ , eine spiegelnde Kurve  $\mathfrak{B}$  und einen Punkt  $D$ . Es soll eine Kurve  $\mathfrak{C}$  so konstruiert werden, daß sich die von  $A$  ausgehenden Lichtstrahlen nach Spiegeln an  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  in  $D$  wieder vereinigen. Leibniz stellt fest, daß die Länge des von  $A$  ausgehenden und in  $D$  endenden Lichtweges, der aus einem dreiteiligen Streckenzug besteht, unveränderlich ist.

<sup>10</sup> B/L, 15. I. 1704 (L, S. 738/39).

<sup>11</sup> L/B, 20. I. 1704 (C, S. 108/09 = L, S. 741/42).

<sup>12</sup> B/L, 25. XI. 1705 (L, S. 776/77) und 30. I. 1706 (L, S. 782/83).

<sup>13</sup> Verwiesen sei auf die *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi*. London 1685, und auf den *Tractatus de figurarum quadraturis et locis geometricis*. London 1693. Zur Entstehungsgeschichte der ersten dieser beiden Schriften vgl. J. E. Hofmann-H. Wieleitner: *Erste Versuche Leibnizens und Tschirnhausens, eine algebraische Funktion zu integrieren*, Archiv f. Geschichte d. Math., d. Naturw. u. d. Technik 13, 277–292 (1931).

<sup>14</sup> PT I/II 1704 = AE IV 1705 (B, S. 406/08).

<sup>15</sup> Aus B/L, 25. VII. 1705 (C, S. 133/34 = L, S. 769) geht hervor, daß Bernoulli das MS seines Aufsatzes kurz zuvor an die Schriftleitung der AE gesandt hatte. Der Beitrag erschien in den AE VIII 1705 (B, S. 408/24).



von  $P_1$  und  $P_2$  als Funktionen des Tangentenwinkels  $\tau$  auffassen und als mitgeführten Punkt  $P$  den Ursprung des Koordinatensystems wählen, auf das  $\mathfrak{R}_2$  bezogen ist und dessen Achsen parallel zu den Achsen des für  $\mathfrak{R}_1$  verwendeten Koordinatensystems laufen. Dann hat  $\Pi$  hinsichtlich der festen Ebene das Koordinatenpaar  $\xi = x_1 + x_2$ ;  $\eta = y_1 + y_2$ .

Einleitend übt Bernoulli scharfe Kritik an Craig, dessen Verfahren zu umständlich und speziell sei. Dann wird das Leibnizsche Vorgehen mit allgemeinen Worten geschildert, jedoch bemerkt, daß die rechnerische Durchführung nicht leicht möglich sei.

4. Leibniz setzte sich gegen diese Ansicht Bernoullis brieflich energisch zur Wehr. Vor allem zeigt er<sup>16</sup>, wie sich die bogengleiche Transformation eines (singularitätenfreien) Bogens  $\widehat{AB}$  durchführen läßt, wenn sich die Tangenten  $a$  und  $b$  in dessen Endpunkten in einem eigentlichen Punkt  $C$  schneiden. Er beschreibt die Ellipse durch  $C$  mit  $A$  und  $B$  als Brennpunkten, faßt diese Kurve als spiegelnd auf und läßt an ihr die Gesamtheit der Tangenten des Ausgangsbogens zur Reflexion kommen. So entsteht eine Geradenschar, die den gesuchten Bogen umhüllt. Nebenher zieht Leibniz auch die Hyperbel durch  $C$  mit den Brennpunkten  $A$  und  $B$  in Betracht. Ein etwas eingehenderes MS<sup>17</sup>, das ursprünglich zur Einreichung für die *Acta eruditorum* bestimmt war, wurde unter dem Eindruck kritischer Bemerkungen Bernoullis<sup>18</sup> zurückgehalten. Vor allem hatte Bernoulli zu beanstanden, daß Leibniz unnötigerweise die Spiegelung an einem Kreis hatte ausschließen wollen<sup>19</sup>. Leibniz wünschte, neben den Allgemeinbemerkungen Bernoullis auch noch ein überzeugendes Anwendungsbeispiel für den *motus reptorius* zu erhalten<sup>20</sup>. Bernoulli fand sich gern dazu bereit<sup>21</sup>. Als feste Kurve wählt Bernoulli die Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; als bewegliche die Ellipse  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ . Der Kürze halber setzt er  $a^2 - x^2 = t^2$  und erhält

$$\xi = x + b^3 x : \sqrt{a^4 t^2 + b^4 x^2}; \quad \eta = b t : a + a^3 t : \sqrt{a^4 t^2 + b^4 x^2}.$$

Die entstandene Kurve mit 8 Scheiteln (*octogibba*) ist konvex und vierfach symmetrisch; sie hat 4 Scheitel in den Schnittpunkten mit den Achsen und vier andere in den Schnittpunkten mit den Winkelhalbierenden der 4 Quadranten. Sie umschließt den Kreis des Halbmessers  $a + b$ , der sie in den 4 Scheiteln auf den Achsen trifft, und wird umschlossen vom Kreis des Halbmessers  $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$ , der sie in den 4 Scheiteln auf den Winkelhalbierenden trifft. Der Umfang der *octogibba* ist das Doppelte des Ellipsenumfanges; folglich liegt dieser zwischen den Umfängen der Kreise des Halbmessers  $(a + b) : 2$  und  $\sqrt{(a^2 + b^2)} : 2$ . Wird die so erhaltene Kurve als die feste Ausgangskurve angesehen, als bewegliche die um  $45^\circ$  verdrehte, dann entsteht durch *motus reptorius* eine 16-Scheitel-Kurve, die achtfach symmetrisch ist. Ihr Inkreis des Halbmessers  $a + b + \sqrt{2(a^2 + b^2)}$  trifft die Kurve in 8 Scheiteln; der Umkreis des Halbmessers  $2\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a^4 + 6a^2b^2 + b^4)} : 2$  trifft die Kurve in den acht anderen Scheiteln. Dieses Verfahren, fügt Bernoulli bei, läßt sich fortsetzen und liefert eine Methode zur Annäherung des Ellipsenumfanges, die der Archimedischen für den Kreis durch ein- und umbeschriebene Vielecke entspricht, jedoch rascher zum Ziel führt.

<sup>16</sup> L/B, 27. XII. 1705 (C, S. 142/43 = L, S. 778/79).

<sup>17</sup> L, S. 779/81.

<sup>18</sup> Vor allem in B/L, 30. I. 1706 (L, S. 782/83) und 13. III. 1706 (C, S. 145/47 = L, S. 785/87).

<sup>19</sup> Über die Einzelheiten vgl. B/L, 13. III. 1706 (C, S. 145/47 = L, S. 785/87) und 11. IX. 1706 (C, S. 156/59 = L, S. 796/98).

<sup>20</sup> L/B, 3. X. 1706 (C, S. 160/61 = L, S. 801/02).

<sup>21</sup> B/L, 15. I. 1707 = MB (C, S. 162/69 = L, S. 803/09 = B, S. 437/43).



5. Leibniz war von den Ausführungen Bernoullis entzückt<sup>22</sup>. Er schlug vor, sie in den von ihm vorbereiteten ersten Band der *Miscellanea Berolinensia* aufzunehmen<sup>23</sup>, was Bernoulli gerne gestattete<sup>24</sup>. Bei dieser Gelegenheit wurden auch Auszüge aus einem weiteren Brief Bernoullis<sup>25</sup> abgedruckt, die interessante Zusätze enthalten. Bernoulli hebt hervor, daß die Ellipse auch durch andere Figuren ersetzt werden könne, z. B. durch ein Flächenstück, das durch Spiegeln eines zur Achse symmetrischen Parabelsegments entsteht. Auch hier soll die bewegliche Fläche aus der festen durch Drehen um  $90^\circ$  hervorgehen. Bei dieser Gelegenheit könne es vorkommen, daß die vom Mittelpunkt der beweglichen Fläche beschriebene Kurve auch Ecken erhalte und nicht durch eine einzige Gleichung beschrieben werden könne, sondern aus kongruenten Teilbogen zusammengesetzt werde.

Man könne die Ellipse sogar durch eine Strecke ersetzen. Jetzt entstehe zunächst als Mittelpunktstort der wandernden Strecke ein Quadrat, dann bei Parallelbewegung des um  $45^\circ$  gedrehten Quadrates längs des festen als Mittelpunktstort ein regelmäßiges Achteck usw. Durch leichte Abänderung des eingeschlagenen Verfahrens erhält Bernoulli eine spezielle Näherungskonstruktion für den Halbmesser  $r$  jenes Kreisbogens des gegebenen Zentrivinkels  $\alpha$ , der einer gegebenen Strecke  $a$  gleich ist. Er begnügt sich mit der Schilderung seines Verfahrens; and Hand der Abb. 1, deren Bezeichnungen gegenüber dem Original etwas modernisiert sind, habe ich gleich den Beweis ergänzt.

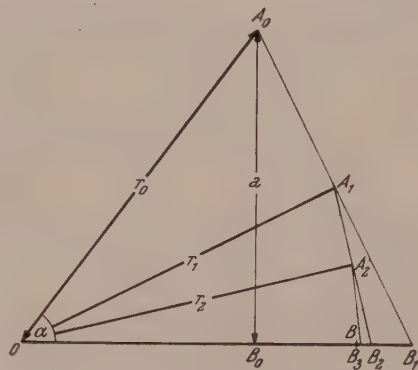


Abb. 1

Bernoulli beginnt mit dem rechtwinkligen Dreieck  $OA_0B_0$ , worin  $\alpha$  der Winkel bei  $O$  und  $a = OA_0$  dessen Gegenkathete ist. Dann verlängert er  $OB_0$  bis  $B_1$  so, daß  $OB_1 = OA_0$  [ $= r_0 = a : \sin \alpha$ ]. Hierauf halbiert er  $A_0B_1$  durch  $A_1$  und bestimmt  $B_2$  auf  $B_0B_1$  so, daß  $OB_2 = OA_1$  [ $= r_1 = a : 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ ]. Nun halbiert er  $A_1B_2$  durch  $A_2$  und bestimmt  $B_3$  auf  $B_0B_2$  so, daß  $OB_3 = OA_2$  [ $= r_2 = a : 4 \sin \frac{\alpha}{4}$ ] und setzt das eingeschlagene Verfahren fort. Ersichtlich ergibt sich nach unendlich vielen Schritten  $OB = r = \lim_{n \rightarrow \infty} OB_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a : 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} = \frac{a}{\alpha}$ . Im Grunde handelt es sich um die schon von Descartes (Nachlaß) benutzte Methode zur Arkuifikation einer gegebenen Strecke<sup>26</sup>. Bernoulli bemerkt ergänzend, die Folge der Punkte  $A_k$  liege auf einer Quadratrix des Deinostratos (mit der Gleichung  $r = a \varphi : \alpha \sin \varphi$ ). Den fehlenden Beweis ergänzen wir so: Ist  $O$  der Anfangspunkt und  $OB_0$  die Achse

<sup>22</sup> L/B, 1. II. 1707 = MB (C, S. 171/73 = L, S. 811/12 = B, S. 444). Leibniz hätte es gerne gesehen, wenn Bernoulli auch den Fall gemeiner Zykloiden durchgerechnet hätte, deren Bögen ja — wie damals schon allgemein bekannt war — algebraisch ausgedrückt werden können. Bernoulli ging auf diesen Vorschlag wegen der von ihm richtig beurteilten erheblichen Rechenschwierigkeiten nicht näher ein: B/L, 23. III. 1707 (C, S. 174 = L, S. 812).

<sup>23</sup> L/B, 24. VI. 1707 (C, S. 178/79 = L, S. 818).

<sup>24</sup> B/L, 12. VIII. 1707 (L, S. 817/18).

<sup>25</sup> B/L, 23. III. 1707 = MB (C, S. 174/76 = L, S. 812/14 = B, S. 445/47).

<sup>26</sup> Bernoulli konnte dieses Verfahren aus den *Opuscula posthuma physica et mathematica*, Amsterdam 1701 = *OEuvres* X; ed. Ch. Adam-P. Tannery, Paris 1908, S. 304/05, kennen, auf die in L/B, 2. X. 1703 (C, S. 96 = L, S. 726) hingewiesen ist. Er nennt Descartes in seinem Brief nicht. — Das Bernoullische Verfahren wurde später des öfteren wieder aufgefunden, ohne daß man sich des Erstentdeckers erinnert hätte. Vgl. G. Loria: *Curve piani spezialie algebriche e transcendent*. Mailand 1902, <sup>2</sup>1919, <sup>3</sup>1930, deutsch von Fr. Schütte, Leipzig/Berlin <sup>2</sup>1910/11, Bd. II, S. 27/30.

eines Polarkoordinatensystems, dann hat der Punkt  $A_k$  die Polarkoordinaten  $r_k$  und  $\varphi_k = \frac{\alpha}{2^k}$ . Also ist  $r_k = a \varphi_k : \alpha \sin \varphi_k$ . Mit Recht betont Bernoulli, daß seine Konstruktion des Grenzpunktes  $B$  besser ist als die übliche bewegungsgeometrische.

6. Der Druck der *Miscellanea Berolinensia* verzögerte sich<sup>27</sup> und deshalb kam Craig nochmals zu Wort<sup>28</sup>, ehe die neuen Bemerkungen Bernoullis veröffentlicht waren. Er glaubte, dessen Einwänden<sup>15</sup> durch Umformung des Ausdruckes

$$dx^2 + dy^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

entgehen zu können, indem er setzte

$$dx = [(m^2 - n^2) d\xi + 2 m n d\eta] : (m^2 + n^2); \quad dy = [2 m n d\xi - (m^2 - n^2) d\eta] : (m^2 + n^2).$$

Nun sieht Craig die Größen  $m$  und  $n$  als konstant an und kann integrieren. Daß sein Verfahren nutzlos ist und nur auf eine kongruente Bewegung des Koordinaten-

systems hinausläuft, hält ihm Bernoulli in einem Schreiben vor<sup>29</sup>, das an einen Hörer Craigs, den Theologiestudenten W. Burnet, gerichtet ist. Dieser junge Mann war im Winter 1708/09 für kurze Zeit bei Bernoulli zu Gast<sup>30</sup>, wußte sich im Frühjahr 1710 während eines mehrwöchigen Aufenthaltes in Hannover bei Leibniz angenehm zu machen<sup>31</sup> und kehrte alsbald über die Niederlande nach London zurück. Am 16. März 1712 wurde er dem Ausschuß beigesellt, der den Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton entscheiden sollte.

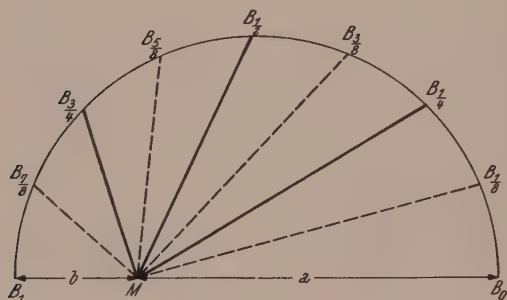


Abb. 2

Das Schreiben an Burnet ging im Auszug an Leibniz, der den Abdruck in den *Miscellanea Berolinensia* veranlassen sollte<sup>32</sup>. Später hat Craig seinen Irrtum öffentlich bekannt und die Einwände gegen Bernoullis Verfahren zurückgezogen<sup>33</sup>.

7. Als PS teilte Bernoulli in jenem Brief, dem das Schreiben an Burnet<sup>29</sup> beilag, eine wundervoll einfache Konstruktion zur Annäherung des Ellipsenumfanges durch einen Kreisumfang mit<sup>34</sup> (Abb. 2, Bezeichnungen modernisiert):

Über die Strecke  $B_0 B_1 = a + b$  als Durchmesser wird der Halbkreis gelegt und sein Bogen durch fortgesetztes Halbieren (Teilpunkte  $B_1 : B_1 : B_3 : B_1 : \dots$ ) in  $2^n$

gleiche Stücke geteilt. Die  $2^n - 1$  Teilpunkte werden mit dem Treffpunkt  $M$  der aneinandergelegten Ellipsenhalmesser verbunden. Jetzt gehen von  $M$   $2^n + 1$  Strecken aus, die sich in zwei Gruppen scheiden. Die eine Gruppe umfaßt die  $2^{n-1}$  Strecken, die zu Punkten mit Indizes gehören, deren Zähler ungerade und deren Nenner  $2^n$  ist. Ihre Summe werde mit  $q$  bezeichnet. Die andere Gruppe umfaßt die Strecken  $a$  und  $b$  und dazu  $2^{n-1} - 1$  weitere Strecken. Die Summe dieser weiteren Strecken werde mit  $p$  bezeichnet. Dann ist  $\left(\frac{a+b}{2} + p\right) : 2^{n-1}$  der Halbmesser jenes Kreises, dessen

<sup>27</sup> L/B vom 25. III. 1709 (C, S. 212 = L, S. 839).

<sup>28</sup> PT III/IV 1708 = AE VIII 1710 (B, S. 449/50).

<sup>29</sup> Brief vom 9. I. 1709, Auszug in MB (B, S. 451/52).

<sup>30</sup> B/L, 15. IV. 1709 (C, S. 215 = L, S. 840/41).

<sup>31</sup> L/B, 6. VI. 1710 (C, S. 225 = L, S. 850).

<sup>32</sup> B/L, 15. IV. 1709 (C, S. 215/16 = L, S. 840/41).

<sup>33</sup> PT X 1710 = AE VII 1713; Auszug in MB (B, S. 452).

<sup>34</sup> B/L, 15. IV. 1709, PS = MB (C, S. 217/18 = L, S. 842/43 = B, S. 447/48). — Die tiefere Bedeutung dieses Verfahrens soll an anderm Ort dargelegt werden. (Zusatz bei der Korrektur.)

Umfang kleiner ist als der Ellipsenumfang; der Ausdruck  $q: 2^{n-1}$  ist der Halbmesser jenes Kreises, dessen Umfang größer ist als der Ellipsenumfang.

Leibniz, nunmehr im siebenten Lebensjahrzehnt und mit zahllosen Geschäften überhäuft, hat nicht mehr die frühere Spannkraft. Es fällt ihm nicht immer leicht, den scharfsinnigen Gedankengängen des im kräftigsten Alter stehenden Bernoulli zu folgen. Was er vorbringt, stammt in erster Linie aus seinem großen Erfahrungsschatz und ist nicht die Frucht längeren Nachdenkens. Wenn er Bernoullis neue Entdeckungen lobt, dann ist das mehr als billige Höflichkeit; es ist richtig, wenn er darüber urteilt: Sie verdienen es, nicht zugrunde zu gehen<sup>35</sup>. Wie schade, daß sie — obwohl seit 1710 im Druck zugänglich — doch beinahe vergessen sind.

<sup>35</sup> L/B, 25. III. 1709 (C, S. 212 = L, S. 839).

(Eingegangen am 23. Februar 1956)

## Zur Lösbarkeit der hyperbolischen Differentialgleichungen

Von H. Hornich, Graz

**Zusammenfassung.** Zu jeder hyperbolischen Differentialgleichung gibt es beliebig benachbarte Differentialgleichungen (das sind Gleichungen, deren entsprechende Koeffizienten beliebig wenig differieren), die überall, also in jedem Teilgebiet, unlöslich sind.

Bei der großen Bedeutung gerade der hyperbolischen Differentialgleichungen für die Anwendungen in Physik und Technik ist es von Interesse, daß es unter diesen solche gibt, die überall, das heißt in jedem Teilgebiet, unlösbar sind, ja daß es sogar zu jeder hyperbolischen Differentialgleichung mit stetigen Koeffizienten beliebig „benachbarte“ Differentialgleichungen mit dieser Eigenschaft gibt. Diese Sätze, die sich an einige kürzlich erschienene Arbeiten über Differentialgleichungen erster Ordnung anschließen, sollen hier etwas ausgeführt werden, wobei wir uns auf den Fall zweier Variabler beschränken.

Sei  $G$  ein beliebiges Gebiet der  $xy$ -Ebene, dann gibt es stetige Funktionen  $\varphi(x, y)$  auf  $G$ , so daß die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \varphi(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \quad (1)$$

für jede stetige und stetig nach  $y$  differenzierbare Funktion  $f$  in  $G$  unlösbar ist, und zwar sogar in jedem Teilgebiet  $G'$  von  $G$ , in dem  $\frac{\partial f}{\partial y}$  nicht identisch verschwindet<sup>1</sup>.

Die stetige Funktion  $\varphi$  kann dabei absolut genommen beliebig klein gewählt werden. Durch eine einfache Transformation erkennt man ferner<sup>2</sup>, daß es zu jeder in  $G$  gleichmäßig stetigen Funktion  $\psi(x, y)$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  stetige Funktionen  $\varphi(x, y)$  mit  $|\varphi - \psi| < \varepsilon$  und der obigen Eigenschaft gibt. Diese Ergebnisse übertragen wir nun auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Seien  $\alpha(x, y)$  und  $\beta(x, y)$  stetig differenzierbar in  $G$  und  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ , so ist mit einer Funktion  $\varphi(x, y)$  der obigen Art die Differentialgleichung

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \varphi(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \Phi(x, y) \quad (2)$$

in  $G$  unlösbar für alle stetigen und stetig nach  $y$  differenzierbaren Funktionen  $\Phi$ , und zwar in jedem Teilgebiet von  $G$ , in dem  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  nicht identisch verschwindet. Nun ist (2) ausgeführt:

<sup>1</sup> Mh. Math. 59, 34—42 (1955); Rend. Sem. Mat. Padova 26, 160—164 (1955).

<sup>2</sup> Rend. Sem. Mat. Torino 14, 33—37 (1954/55).



$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\beta - \alpha \varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \varphi \beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} = \Phi(x, y), \quad (3)$$

also wegen

$$-\alpha \beta \varphi - \frac{(\beta - \alpha \varphi)^2}{4} = -\frac{1}{4} (\alpha \varphi + \beta)^2 \leq 0$$

eine hyperbolische Differentialgleichung, da  $\alpha \varphi + \beta$  in keinem Teilgebiet von  $G$  identisch verschwindet: ansonsten wäre ja  $\varphi$  dort eine stetig differenzierbare Funktion, was natürlich nicht der Fall ist.

Sei nun eine beliebige Differentialgleichung in  $G$

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} = P(x, y) \quad (4)$$

gegeben, wobei  $a, b, c, d, e, P$  gleichmäßig stetige Funktionen in  $G$  seien, mit  $ac - b^2 < 0$ ,  $ac \neq 0$  und  $\inf |a| > 0$ .

Wir bestimmen drei Funktionen  $A, B$  und  $\Phi$  auf  $G$ , so daß

$$a = A, \quad 2b = B - A\Phi, \quad c = -\Phi B, \quad (5)$$

was wegen

$$a\Phi^2 + 2b\Phi + c = 0$$

reell möglich ist: es sind dann

$$A = a \quad B = b - \sqrt{b^2 - ac} \quad \Phi = \frac{1}{a} (-b - \sqrt{b^2 - ac})$$

gleichmäßig stetig in  $G$ .

Dann hat die Differentialgleichung (4) die Gestalt

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B - A\Phi) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \Phi B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} = P(x, y).$$

Wir bestimmen weiter zwei stetig differenzierbare Funktionen  $\alpha, \beta$  und eine stetige Funktion  $\varphi$  wie in (1), so daß mit einem  $\varepsilon > 0$

$$|A - \alpha| < \varepsilon, \quad |B - \beta| < \varepsilon, \quad |\Phi - \varphi| < \varepsilon \quad (6)$$

wird, und ferner zwei stetig differenzierbare Funktionen  $\sigma, \tau$  mit

$$\left| \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \alpha}{\partial y} - d - \sigma \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial \beta}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \beta}{\partial y} - e - \tau \right| < \varepsilon.$$

Dann ist die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\beta - \alpha \varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \varphi \beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} = P + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

nur dann in einem Teilgebiet  $G'$  von  $G$  lösbar, wenn für die Lösung  $u$  von (7) in  $G'$  gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ P + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0, \quad (8)$$

also

$$P + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial u}{\partial y}$$

eine Funktion nur von  $x$  ist; dann aber ist in (7) gleichzeitig<sup>3</sup>

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0 \quad (9)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right] = P + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial u}{\partial y}.$$

<sup>3</sup> Vgl. I. c., Anm. 1.

Es müßten also die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} &= f(x), \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial u}{\partial y} &= f'(x) - P \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

zusammen bestehen; daraus ergibt sich für die Funktion  $f$  eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten Funktionen von  $x$  und  $y$  sind; wir können dabei die  $\alpha, \beta, \sigma, \tau$  so wählen, daß die Lösung  $f$  nicht bloß eine Funktion von  $x$  sein kann.

Es ist also (10) und damit auch (7) unlösbar und es gilt:

Zu jeder hyperbolischen Differentialgleichung (4) gibt es beliebig benachbarte Differentialgleichungen (7) (das heißt die entsprechenden Koeffizienten der beiden Gleichungen unterscheiden sich beliebig wenig), die überall, also in jedem Teilgebiet, unlösbar sind.

So ist z. B. zur Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Q(x, y) \quad (\omega \text{ Konstante})$$

die ihr benachbarte Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\omega - \varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \varphi \omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Q(x, y)$$

überall unlösbar, wobei wir  $|\omega - \varphi| < \varepsilon$  wählen können.

Bei der Konstruktion von Lösungen und bei Existenzbeweisen für die hyperbolischen Differentialgleichungen kommt man also nicht mit der Stetigkeit der Koeffizienten aus; es ist wesentlich, daß hierzu stärkere Eigenschaften, wie etwa die Differenzierbarkeit, vorausgesetzt werden müssen.

(Eingegangen am 14. Februar 1956)

## Reibungsbeiwert und adiabater Wirkungsgrad für eine geradkegelig erweiterte Verdichtungsdüse (Unterschalldiffusor)

Von C. Kämmerer, Wien

**Zusammenfassung.** Die Verluste durch Wandreibung und Zähigkeit finden im Rohrreibungsbeiwert ihren zahlenmäßigen Ausdruck. Im Falle der Verdichtungsdüse steht dieser Beiwert mit dem Wirkungsgrad der Verdichtung in Zusammenhang, wie in folgender Betrachtung näher ausgeführt wird.

Allgemein gilt für ein wärmeisoliertes Rohr mit veränderlichem Durchmesser und für Gas als strömendes Medium die Differenzialgleichung<sup>1, 2</sup>:

$$\frac{dw}{w} (c w^2 - b) + \frac{2 dr}{r} (h w^2 - b) = - \frac{w^2 \lambda dL}{4 r}. \quad (1)$$

Hierin bezeichnet:

$L$  die Länge des Rohres in Strömungsrichtung

$$c = \frac{\kappa + 1}{2 \kappa}, \quad h = \frac{\kappa - 1}{2 \kappa}, \quad g R \left( \frac{A w_1^2}{2 g c_p} + T_1 \right) = b,$$

<sup>1</sup> C. Kämmerer: Strömung in einer Expansionsdüse mit Reibung. Österr. Ingenieur-Arch. 8, H. 4, 293 (1954).

<sup>2</sup> C. Kämmerer: Die Expansionsdüse mit polytropem Zustandsverlauf. Allg. Wärmetechnik, Jg. 6, H. 2, 35—37 (1955).

$\kappa$  das Verhältnis der spezifischen, auf das kg bezogenen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen ( $\kappa = c_p/c_v$ ),  
 $R$  die spezielle Gaskonstante,  
 $T$  die absolute Temperatur,  
 $w$  die Geschwindigkeit,  
 $g$  die Erdbeschleunigung,  
 $r$  den Radius des kreisförmig gedachten Querschnittes  $f$  der Röhre,  
 $\lambda$  den Rohrreibungsbeiwert, definiert durch die Gleichung für den Druckabfall  $\Delta p$  in einem Rohr:

$$\Delta p = \gamma \frac{w^2}{2g} \cdot \lambda \cdot \frac{\Delta L}{2r}, \quad (1a)$$

$\gamma$  das spezifische Gewicht.

Führt man den halben Erweiterungswinkel  $\alpha$  des Unterschalldiffusors mit Hilfe der Größe:

$$a = h + \frac{\lambda}{8 \operatorname{tg} \alpha} \quad (1b)$$

in die Rechnung ein, so läßt sich Gl. (1) auch in folgender Form schreiben:

$$-\frac{2}{r} \frac{dr}{r} = \frac{dw}{w} \left[ \frac{c w^2 - b}{a w^2 - b} \right] = \frac{dw}{w} \left[ \frac{w^2 - b/c}{w^2 - b/a} \right] \frac{c}{a}. \quad (2)$$

Durch bestimmte Integration von Gl. (2) zwischen den Querschnitten  $f_1$  und  $f_2$  erhält man für konstantes  $\operatorname{tg} \alpha$ :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{w_2}{w_1} \left[ \frac{a w_1^2 - b}{a w_2^2 - b} \right]^{\frac{a-c}{2a}}, \quad (3)$$

wobei sich der Index 1 auf den Anfang, der Index 2 auf das Ende des Diffusors (in Strömungsrichtung) und der Index 0 auf den verlustlosen (reversiblen) Vorgang bezieht. Für diesen ist wegen  $\lambda = 0$ :

$$a = h \quad \text{und} \quad \frac{a-c}{2a} = \frac{h-c}{2h} = -\frac{1}{\kappa-1}.$$

Daher ist nach Gl. (3):

$$\frac{f_1}{f_{20}} = \frac{r_1^2}{r_{20}^2} = \frac{w_{20}}{w_1} \left[ \frac{h w_{20}^2 - b}{h w_1^2 - b} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}. \quad (4)$$

Nach Gl. (4) ist die verlustlose Endgeschwindigkeit  $w_{20}$  nur vom Querschnittsverhältnis abhängig.

Gl. (3) läßt sich auch schreiben:

$$2 \log \left( \frac{r_1}{r_2} \right) + \log \left( \frac{w_1}{w_2} \right) = \frac{a-c}{2a} [\log (a w_1^2 - b) - \log (a w_2^2 - b)]. \quad (5)$$

Ebenso ergibt sich aus Gl. (4) für die reibungslose Düse:

$$2 \log \left( \frac{r_1}{r_{20}} \right) + \log \left( \frac{w_1}{w_{20}} \right) = \frac{1}{\kappa-1} [\log (h w_{20}^2 - b) - \log (h w_1^2 - b)]. \quad (6)$$

Für die gleiche Verdichtungsdüse (mit demselben Querschnittsverhältnis und derselben Länge) ergibt sich jedoch reibungslos ein anderer, nämlich höherer Enddruck  $p_2$  als mit Berücksichtigung der Reibung.

Bei Ermittlung des adiabaten Wirkungsgrades  $\eta_{ad}$  wird, sonach die wirkliche, vorgegebene Düse mit einer gedachten, wesentlich kürzeren Düse verglichen, wenn, wie üblich, der gleiche Erweiterungswinkel  $\alpha$  und der gleiche End- bzw. Gegendruck  $p_2$  zugrunde gelegt wird.



Nimmt man die erwähnte Unstimmigkeit in Kauf und ermittelt für eine gegebene Düse ( $r_1, r_2, L, p_1, T_1, w_1, \lambda$ ) aus Gl. (5) oder (3) durch wiederholtes Probieren die Endgeschwindigkeit  $w_2$ , so ist:

$$\eta_{\text{ad}} = \frac{w_1^2 - w_{20}^2}{w_1^2 - w_2^2}, \quad (7)$$

wobei  $w_{20}$  noch wie folgt zu bestimmen ist:

Zunächst ergibt sich aus der Kontinuitätsbeziehung:

$$r^2 \pi w = f \cdot w = G \cdot v = G R T / p, \quad (8)$$

wobei  $v$  das spezifische, auf das kg des Gases bezogene Volumen und  $G$  die sekundliche Gasmenge in kg bedeutet.

Da die Temperatur im Diffusor bekanntlich durch die Strömungsgleichung:

$$T = T_1 + \frac{A}{2 g c_p} (w_1^2 - w_2^2) \quad (8a)$$

bestimmt ist, ergibt sich mit obigen Substitutionen für den Druck  $p$  die Beziehung:

$$p = \frac{G R \left[ T_1 + \frac{A}{2 g c_p} (w_1^2 - w_2^2) \right]}{\pi r^2 w} = \frac{G (b - h w^2)}{g \pi r^2 w}. \quad (9)$$

Das Druckverhältnis, welches, wie erwähnt, für den reversiblen und reibungsbehafteten Fall voraussetzungsgemäß das gleiche sein soll, lautet nach Gl. (9):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{r_2^2 w_2 (b - h w_1^2)}{r_1^2 w_1 (b - h w_2^2)} = \frac{r_{20}^2 w_{20} (b - h w_1^2)}{r_1^2 w_1 (b - h w_{20}^2)}. \quad (10)$$

Daraus ergibt sich die Relation:

$$\frac{r_2^2 w_2}{(b - h w_2^2)} = \frac{r_{20}^2 w_{20}}{(b - h w_{20}^2)}. \quad (11)$$

Anderseits erhält man aus Gl. (4) und (11):

$$\frac{r_2^2 w_2}{r_1^2 w_1} = \frac{(b - h w_2^2)}{(b - h w_{20}^2)} \left\{ \frac{(h w_1^2 - b)}{(h w_{20}^2 - b)} \right\}^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad (12)$$

woraus sich nun die verlustlose Endgeschwindigkeit  $w_{20}$  wie folgt berechnen läßt:

$$(b - h w_{20}^2)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \frac{r_1^2 w_1}{r_2^2 w_2} (b - h w_2^2) \left[ (b - h w_1^2)^{\frac{1}{\kappa-1}} \right]. \quad (13)$$

Mit  $w_{20}$  läßt sich dann aus Gl. (11)  $r_{20}$ , also der Endquerschnitt der gedachten reibungslosen Düse, und aus Gl. (10) der für beide Düsen als gleich angenommene Enddruck  $p_2$  bestimmen. Der adiabate Wirkungsgrad  $\eta_{\text{ad}}$  des Diffusors ergibt sich schließlich aus Gl. (7).

Zur Kontrolle der Rechnung kann die Beziehung dienen:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{w_1 \left[ \left\{ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right\} \frac{1}{\eta_{\text{ad}}} + 1 \right]}{\left( \frac{p_2}{p_1} \right) \sqrt{w_1^2 - \frac{2 g c_p T_1}{A \eta_{\text{ad}}} \left\{ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right\}}}, \quad (14)$$

die sich aus einer Betrachtung des Vorganges im  $Ts$ -Diagramm in einfacher Weise ableiten läßt. Der Erweiterungswinkel und die Länge der Düse kommt hier nicht zum Ausdruck.

Der Ausdruck unter der Wurzel stellt das Quadrat der Austrittsgeschwindigkeit  $w_2$  dar, so daß Gl. (14) auch geschrieben werden kann:

$$\frac{r_2^2 w_2}{r_1^2 w_1} = \frac{p_1}{p_2} \left[ \left\{ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right\} \frac{1}{\eta_{ad}} + 1 \right], \quad (15)$$

was in Verbindung mit Gl. (12) ebenfalls zur Kontrolle der Rechnung dienen kann.

Sind umgekehrt der Wirkungsgrad  $\eta_{ad}$  einer Düse sowie alle Anfangswerte ( $p_1$ ,  $T_1$ ,  $w_1$ ,  $f_1$ ) bekannt, so läßt sich das Querschnittsverhältnis aus dem Druckverhältnis nach Gl. (14) bestimmen. Nach Gl. (3) und (1b) kann dann auch der zugehörige  $\lambda$ -Wert zurückgerechnet werden.

Beispiel. Für einen Diffusor von 2 m Länge,  $r_1 = 5$  cm,  $\alpha = 3^\circ$ ,  $w_1 = w_s = 347.7$  m/sec,  $p_1 = 1$  ata und Luft von  $T_1 = 300^\circ$  K ergibt sich für

$$\lambda = 0.025, 0.06, 0.1, 0.299,$$

$$\eta_{ad} = 0.965, 0.907, 0.851, 0.263.$$

$\lambda = 8 \operatorname{tg} \alpha / \kappa = 0.299$  ist der höchste Wert, für den eine Verdichtung im Unterschallgebiet noch möglich ist. Er entspricht bereits der vollständigen Drosselung (bei konstanter Temperatur und konstanter Schallgeschwindigkeit). Siehe Abb. 7 der mit Fußnote 2 zitierten Arbeit.

Nach obiger Tabelle entspricht der üblichen Annahme eines Diffusorwirkungsgrades von 85% bereits der ungewöhnlich hohe Reibungsbeiwert 0.1. Für Unterschalldiffusoren muß also  $\lambda$  wesentlich höher eingesetzt werden als für das gerade Rohr bei gleicher Reynolds-Zahl und Rauigkeit, was auf zusätzliche Wirbelungs- und Ablösungstendenzen infolge der Rohrerweiterung zurückzuführen ist.

(Eingegangen am 22. Februar 1956)

## Die Schirmschwingungen der Kreismembran unter allgemeinen Bedingungen

Von K. Karas, Darmstadt

Mit 3 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Gegenüber den bisherigen Lösungen der Schirmschwingungen von Kreismembranen wurden hier Verallgemeinerungen in dreierlei Hinsicht vorgenommen: Es wurde 1. die Masse des Fassungsringes, 2. seine elastische Lagerung, 3. die Rotationsträgheit der Membran berücksichtigt. Die Verallgemeinerungen 1 und 3 bedingen das Vorkommen des Eigenwertes in der dynamischen Randbedingung, 3 bedingt auch eine Verallgemeinerung der Differentialgleichung. Außerdem wurde geringe achsensymmetrische Veränderlichkeit der Membrandicke und -dicke zugelassen. Die Grundgleichungen werden durch Gleichgewichtsbetrachtungen hergeleitet und außerdem mittels des Prinzips von Hamilton kontrolliert. Die Integrodifferentialgleichung des Problems bei beachteter bzw. die Integralgleichung bei nicht beachteter Rotationsträgheit wird angegeben und die Selbstadjungiertheit und bedingte Volldefinitheit derselben untersucht. Für spezielle, praktisch aber wichtige Fälle werden Näherungslösungen nach dem bekannten Verfahren von W. Ritz gewonnen und auch die strenge Frequenzgleichung angegeben.

### I. Einleitung

Die Beschränkung auf Schirmschwingungen, die also Knotenkreise aufweisen, die zum Außenrandkreis konzentrisch sind, bedingt eine achsensymmetrisch verteilte Membranspannung. Man kann zeigen<sup>1</sup>, daß dieselbe bei der Kreismembran, im Falle der Achsensymmetrie, für alle Schnittrichtungen jedes Membranpunktes denselben

<sup>1</sup> Dies wird in einer späteren Arbeit über Schirmschwingungen von Kreisringmembranen gezeigt werden.

Absolutbetrag aufweist, also nur einem homogenen statischen Spannungszustand zugehören kann, während bei der Kreisringmembran grundsätzlich auch ein inhomogener, achsensymmetrischer Ruhe-Spannungszustand möglich ist, der dann den bekannten Laméschen Gleichungen genügt. Dieser statische homogene Spannungszustand erfährt auch im dynamischen Falle, also beim Auftreten von Schwingungen, nur unendlich kleine Änderungen, sofern auch die Membranauslenkungen im Sinne der Approximationsmathematik als unendlich klein vorausgesetzt werden. Dies wird im Abschnitt II erhärtet werden.

Die vorauszusetzende Achsensymmetrie bedingt ferner die gleiche Masse je Längeneinheit des Umfanges des Fassungsringes, der mit dem Außenrandkreis der Membran zusammenfällt, sowie auch die gleiche Größe je Längeneinheit der Rückführungskonstante der elastischen Lagerung desselben.

## II. Herleitung und Formulierung des Eigenwertproblems aus Gleichgewichtsbetrachtungen

In Abb. 1 wurde ein Membranelement im Aufrißschnitt und im Grundriß dargestellt, das von zwei coaxialen Zylindern mit den Halbmessern  $r$  und  $r + dr$  und von zwei Meridianschnitten begrenzt ist, die miteinander den Winkel  $d\varphi$  einschließen. Sein Volumen  $dV$  ist:

$$dV = y r d\varphi dr, \quad (1)$$

worin  $y(r)$  die mit  $r$  als veränderlich vorausgesetzte Membrandicke bezeichnet. Wird ferner mit  $dq_r$  die Schnittfläche des Membranelementes mit einem Zylinder vom Halbmesser  $r$  und mit  $dJ_r$  das axiale Flächenträgheitsmoment desselben hinsichtlich einer horizontalen Schnittflächenschwerlinie bezeichnet, so ist

$$dq_r = y r d\varphi; \quad dJ_r = \frac{1}{12} r y^3 d\varphi;$$

somit 
$$\frac{dJ_r}{dq_r} = \frac{1}{12} y^2. \quad (2)$$

Da im Falle der Schwingungsauslenkung  $w$  sich wohl die Bogenlänge der Membran-Meridiankurve ändert, nicht aber die Länge eines Kreisbogens, so mußte in den Meridianschnitten des Membranelementes die statische Spannung  $S$  beibehalten werden, wie im Grundrisse der Abb. 1 ersichtlich ist, während in den Zylinderschnitten desselben die davon verschiedene Spannung  $S_r$  vorausgesetzt werden mußte, wobei die Gleichgewichtsgleichungen zeigen sollen, von welcher Ordnung in  $w$  die Abweichung zwischen  $S_r$  und  $S$  ist.

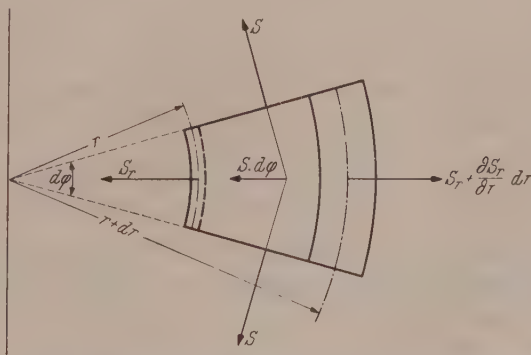
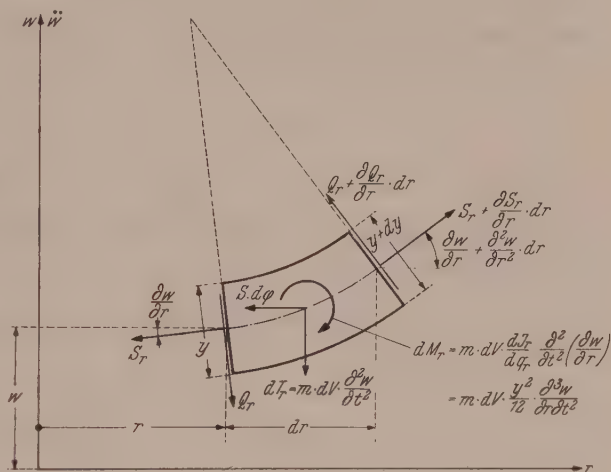


Abb. 1. Die an einem Membranelement angreifenden Kräfte und Momente



Die Schnittgröße  $S$  ist auf die Längeneinheit in radialer Richtung bezogen, die Schnittgrößen  $S_r$  und  $Q_r$  sind jedoch auf die Längeneinheit in azimuthaler Richtung bezogen, wobei  $Q_r$  die durch die Rotationsträgheit bewirkte Querkraft in den erwähnten Zylinderschnitten bedeutet. Eine Querkraft  $Q$  in den Meridianschnitten besteht wegen der vorausgesetzten Achsensymmetrie nicht. Im Aufriß der Abb. 1 sind ferner noch die beim Schwingungsvorgange auftretende Trägheitskraft  $dT_r$  des Elementes sowie sein der positiv vorausgesetzten Winkelbeschleunigung  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)$  entgegengesetzt gerichtetes (also im Uhrzeigersinn wirkendes) Massenbeschleunigungs-Trägheitsmoment  $dM_r$  angegeben, wobei  $m(r)$  die nur von  $r$  abhängige räumliche Dichte des Membranmaterials bedeutet. Es gelten somit folgende Dimensionen:

$$[S] = [S_r] = [Q_r] = M T^{-2}; \quad [m(r)] = M L^{-3}. \quad (3)$$

Das Gleichgewicht des Membranelementes in Richtung  $r$  ergibt:

$$\begin{aligned} & -S_r \cos \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) r d\varphi + Q_r \sin \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) r d\varphi - 2S \sin \left( \frac{\partial \varphi}{2} \right) dr - \\ & - \left( Q_r + \frac{\partial Q_r}{\partial r} dr \right) \sin \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr \right) (r + dr) d\varphi + \\ & + \left( S_r + \frac{\partial S_r}{\partial r} dr \right) \cos \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr \right) (r + dr) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Entwickelt man hierin die Kreisfunktionen unter Beibehaltung von Gliedern, die höchstens klein sind von zweiter Ordnung in  $w$  und seinen Ableitungen, so erhält man nach Weglassung des Faktors  $d\varphi$  zunächst:

$$\begin{aligned} & -S_r r + \frac{1}{2} S_r r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + Q_r r \frac{\partial w}{\partial r} - S dr - \left( Q_r \frac{\partial w}{\partial r} + Q_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr + \frac{\partial Q_r}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} dr \right) (r + dr) + \\ & + \left[ S_r + \frac{\partial S_r}{\partial r} dr - \frac{1}{2} S_r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] (r + dr) = 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man aus und behält wieder nur Glieder bis höchstens zur zweiten Ordnung bei, so folgt:

$$\begin{aligned} & -S_r r + \frac{1}{2} S_r r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + Q_r r \frac{\partial w}{\partial r} - S dr - Q_r r \frac{\partial w}{\partial r} - Q_r r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr - \frac{\partial Q_r}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} r dr - \\ & - Q_r \frac{\partial w}{\partial r} dr + S_r r + \frac{\partial S_r}{\partial r} r dr - \frac{1}{2} S_r r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + S_r dr + \frac{\partial S_r}{\partial r} (dr)^2 = 0. \end{aligned}$$

Teilt man durch  $dr$  und läßt den von höherer Ordnung kleinen letzten Term weg, so erhält man hieraus (nach Weglassung der sechs sich tilgenden Glieder):

$$\left( -S + S_r + \frac{\partial S_r}{\partial r} r \right) - \left( Q_r r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial Q_r}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} r + Q_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0. \quad (4)$$

In (4) sind die Terme des zweiten Klammerausdruckes mit  $w$  und seinen Ableitungen mindestens (das heißt sofern  $Q_r$  und seine Ableitung endlich sind) klein von erster Ordnung. Folglich müssen die Terme des ersten Klammerausdruckes für sich ebenfalls klein von derselben Ordnung sein, was besagt, daß sowohl  $\frac{\partial S_r}{\partial r}$  als auch  $(S_r - S)$  von mindestens erster Ordnung klein sind. Das heißt, daß die Abweichungen vom vorgegebenen statischen Spannungszustand, für den mit  $S_r = S = \text{konst.}$   $\frac{\partial S_r}{\partial r} = 0$  der erste Klammerausdruck verschwindet, unendlich klein sind wie  $w$  und seine Ableitungen [eigentlich sogar wie  $w^2$ , man vgl. unten Gl. (5) und (6)]. Zu bemerken ist noch, daß die partielle Schreibweise wegen der vorausgesetzten Achsensymmetrie in lokaler Hinsicht nicht nötig wäre und nur mit Rücksicht auf die in diesen Funktionen enthaltene Zeit als zweiter unabhängig Veränderlicher eingeführt werden mußte.

Das Gleichgewicht des Membranelementes in Richtung  $w$  nach d'Alemberts Prinzip ergibt:

$$-S_r \sin\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) r d\varphi - Q_r \cos\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) r d\varphi + \left(Q_r + \frac{\partial Q_r}{\partial r} dr\right) \cos\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr\right) (r + dr) d\varphi + \\ + \left(S_r + \frac{\partial S_r}{\partial r} dr\right) \sin\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr\right) (r + dr) d\varphi - m y r d\varphi dr \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Verfährt man wie vor (4), so erhält man zunächst:

$$-S_r r \frac{\partial w}{\partial r} - Q_r r + \frac{1}{2} Q_r r \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left[Q_r - \frac{1}{2} Q_r \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial Q_r}{\partial r} dr\right] (r + dr) + \\ + \left(S_r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial S_r}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} dr + S_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr\right) (r + dr) - m y r dr \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Durch Ausmultiplizieren und Unterdrücken aller von höherer als der zweiten Ordnung kleinen Terme erhält man

$$-S_r r \frac{\partial w}{\partial r} - Q_r r + \frac{1}{2} Q_r r \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + Q_r r + Q_r dr - \frac{1}{2} Q_r r \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial Q_r}{\partial r} r dr + \\ + S_r r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial S_r}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} r dr + S_r r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr + S_r \frac{\partial w}{\partial r} dr - m y r dr \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Bedenkt man nun, daß das Glied mit  $\frac{\partial S_r}{\partial r}$  wegen der nach (4) gewonnenen Erkenntnis gegenüber den anderen Gliedern um mindestens eine Ordnung kleiner ist, so erhält man nach dessen Unterdrückung und Teilung durch  $dr$  und Streichung der sich weghebenden sechs Glieder:

$$Q_r + \frac{\partial Q_r}{\partial r} r + S_r r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + S_r \frac{\partial w}{\partial r} - m y r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Aus (5) erkennt man zunächst, daß  $Q_r$  und  $\frac{\partial Q_r}{\partial r}$  klein sind von erster Ordnung wie  $w$  und seine Ableitungen, so daß man nachträglich aus (4) erschließt, daß  $S_r - S$  und  $\frac{\partial S_r}{\partial r}$  klein von zweiter Ordnung wie  $w^2$  sind, so daß das vor (5) unterdrückte Glied  $\frac{\partial S_r}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} r$  als klein von dritter Ordnung gegenüber den nur von erster Ordnung kleinen übrigen Gliedern von (5) erscheint.

Schließlich ergibt das Gleichgewicht des Membranelementes gegen Drehen um eine azimutale Schwerlinie mit Beachtung von (1) und (2)

$$r d\varphi Q_r dr - m dV \frac{dJ_r}{dq_r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad r d\varphi Q_r dr - m y r d\varphi dr \cdot \frac{y^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0$$

oder

$$Q_r = \frac{1}{12} m y^3 \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial t^2} = m J \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial t^2}, \quad (6)$$

wenn man das auf die Längeneinheit seiner horizontalen Schwerlinie bezogene axiale Querschnittsflächenträgheitsmoment, das mit  $y$  natürlich noch von  $r$  abhängt, mit  $[M_a]$  und  $k_a$  sind unten erklärt]

$$J = \frac{y^3}{12}, \quad [J] = L^3; \quad [M_a] = M L^{-1}; \quad [k_a] = M L^{-1} T^{-2} \quad (7)$$

bezeichnet. Auch (6) bestätigt wieder die bereits nach (5) erschlossene Kleinheit erster Ordnung von  $Q_r$ . Führt man nun  $Q_r$  aus (6) und seine Ableitung in (5) ein, so erhält man, wenn man jetzt statt  $S_r$  einfach  $S$  schreibt (wodurch man nur einen Fehler klein von zweiter Ordnung begeht):

$$m J \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial t^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( m J \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial t^2} \right) + S r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + S \frac{\partial w}{\partial r} - m y r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (8a)$$

(8a) kann man, wie man leicht erkennt, noch kürzer in der selbstadjungierten Form wie folgt schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( m J r \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t^2} \right) + S \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - m y r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (8b)$$

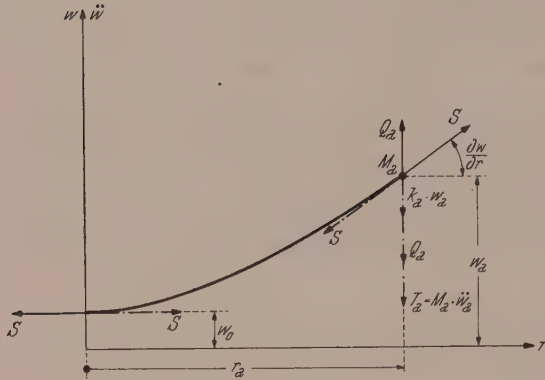


Abb. 2. Die von der Membran empfangenen (voll ausgezogen) bzw. von ihr auf den Außenring ausgeübten (strichpunktiert gezeichneten) Schnittkräfte, sowie die an demselben angreifenden Rückführungs- und Trägheitskräfte (strichpunktiert gezeichnet)

In den Gl. (8a) bzw. (8b) ist die Bewegungsgleichung der Membran dargestellt. Um auch die zugehörigen Randbedingungen des Eigenwertproblems zu finden, sei in Abb. 2 ein Meridianschnitt durch die ausgelenkte Membranzmittelfläche dargestellt.

Ist mit  $M_a$  die je Längeneinheit vorhandene Masse des Spannrings bezeichnet [man vgl. (7)], und wird der Kürze halber statt  $Q_r (r = r_a) = Q_a$  und statt  $w (r = r_a) = w_a$  geschrieben, und ist  $k_a$  die auf die Längeneinheit des Spannrings und die Längeneinheit der Auslenkung  $w_a$  desselben bezogene rückführende Kraft [man vgl. (7)] der elastischen Lagerung des Spannrings, so erfordert das Gleichgewicht der Längeneinheit des Spannrings offenbar:

$$-Q_a - S \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r_a} - M_a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_{r_a} - k_a w_a = 0.$$

Schreibt man hier der Kürze halber für den Zeiger  $r_a$  einfach  $a$ , so erhält man im Zusammenhalte mit  $Q_a$  in (6) und mit der Tatsache, daß für  $r = 0$  gemäß Abb. 2 bei Schirmschwingungen stets eine horizontale Tangente an die Meridiankurve als geometrische Bedingung des Eigenwertproblems erscheint, in leicht verständlicher Schreibweise die beiden Randbedingungen:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_0 = 0; \quad \left( m J r \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t^2} \right)_a + S \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_a + M_a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_a + k_a w_a = 0. \quad (9a, b)$$

Wie man mittels (3) und (7) leicht erkennt, hat jeder Term von (9b) die Dimension  $MT^{-2}$ .  $k_a$  hat nach (7) die Dimension einer Spannung. Durch die Bewegungsgleichungen (8a, b) mit den Randbedingungen (9a, b) ist das vorliegende Eigenwertproblem mathematisch formuliert.

Für die resonanzgefährlichen stehenden Schwingungen, im vorliegenden Falle also für die Schirmschwingungen der Kreismembran, erhält man mit dem bekannten Ansatz von Bernoulli

$$w(r, t) = W(r) \cdot T(t), \quad (10)$$

worin  $W$  nur noch von  $r$ ,  $T$  nur von  $t$  abhängt, in bekannter Art:

$$T(t) = A_T \sin(kt) + B_T \cos(kt), \quad [k] = T^{-1} \quad (11)$$

und aus (8b) bzw. (9a, b) mit  $k$  als Kreisfrequenz des Schwingungsvorganges:

$$S \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) = k^2 \left[ \frac{d}{dr} \left( m J r \frac{dW}{dr} \right) - m y r W \right] \quad (12)$$

$$\left( \frac{dW}{dr} \right)_0 = 0; \quad S \left( \frac{dW}{dr} \right)_a + k_a W_a = k^2 \left[ \left( m J r \frac{dW}{dr} \right)_a + M_a W_a \right]. \quad (13a, b)$$



Man erkennt aus der dynamischen Randbedingung (13b), daß dort der Eigenwert  $k$  durch die Beachtung der Rotationsträgheit und die Berücksichtigung der Masse des Fassungsringes bedingt ist<sup>2</sup>.

### III. Begründung des Eigenwertproblems mittels des Prinzips von Hamilton

Hierdurch wird nicht nur eine erwünschte Kontrolle der bereits gewonnenen Ergebnisse erreicht, sondern die hier errechneten Energieausdrücke gestatten auch eine unmittelbare anderweitige Ausnutzung, z. B. beim Ritzschen Verfahren oder beim Rayleighschen Theorem. Ist  $V$  die potentielle,  $L$  die kinetische Energie des Gesamtsystems, also hier der Membran samt Fassungsring und dessen elastischer Lagerung, so lautet das Prinzip von Hamilton:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (V - L) dt = 0. \quad (14)$$

Hier ist  $V = V_m + V_a$ , worin  $V_m$  die potentielle Energie der maximal ausgelenkten Membran und  $V_a$  die der elastischen Lagerung des maximal ausgelenkten Fassungsringes bedeutet. Bei konstanter Spannung  $S$  gilt<sup>3</sup>:

$$V_m = \frac{1}{2} S \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right] r dr d\varphi.$$

Hierin ist aber, da nur achsensymmetrische Verformungen zugelassen werden,  $\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0$  zu setzen. Führt man ferner die Integration nach  $\varphi$  sofort durch, so erhält man:

$$V_m = \pi S \int_0^{r_a} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 r dr. \quad (15a)$$

Analog erhält man:

$$V_a = \pi r_a k_a w_a^2. \quad (15b)$$

Ebenso ist  $L = L_m + L_a$ , wobei bei der maximalen kinetischen Energie  $L_m$  der Membran in der Gleichgewichtslage die Translations- und Rotationsenergie zu berücksichtigen sind. Man erhält:

$$L_m = \frac{1}{2} \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} m dV \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} m dV \frac{dJ_r}{dq_r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \right)^2.$$

Beachtet man (1) und (2) und führt wieder die Integration nach  $\varphi$  durch, erhält man:

$$L_m = \pi \int_0^{r_a} \left[ m y r \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + m J r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \right)^2 \right] dr. \quad (16a)$$

Hierin ist  $J$  durch (7) erklärt. Ebenso erhält man:

$$L_a = \pi M_a r_a \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_a^2. \quad (16b)$$

<sup>2</sup> Man vgl. die Arbeit des Verf.: Eigenschwingungen von Saiten mit elastisch befestigten Enden, Österr. Ingenieur-Arch. 9, 352–388 (1955), wo die Formulierung des Eigenwertproblems ebenfalls mittels Gleichgewichtsbetrachtungen erfolgte.

<sup>3</sup> Man vgl. hierzu etwa Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, 2. Aufl., Bd. I, S. 153. 1931.

Die Einführung von (15a, b) und (16a, b) in (14) ergibt nach Weglassung des Faktors  $\pi$

$$\delta \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{r_a} \left[ S r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - m y r \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - m J r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \right)^2 \right] dr dt + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t_1} \left[ r_a k_a w_a^2 - r_a M_a \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_a^2 \right] dt \right\} = 0. \quad (17)$$

Enge verwandt hiemit ist der Ausdruck  $F(W) = L_i - L_a$ , der die Differenz der Form-äußerungsarbeit  $L_i$  und der Arbeit  $L_a$  der äußeren Kräfte, hier also der Trägheitskräfte für die Amplitudenfunktion  $W(r)$  der Membran allein darstellt. Das Verschwinden der ersten Variation von  $F(W)$  ist bekanntlich eine notwendige Bedingung für  $W(r)$ . Man vgl. hiemit die allgemeinere Gl. (57). Es folgt:

$$F(W) = S r \left( \frac{dW}{dr} \right)^2 - k^2 \left[ m J r \left( \frac{dW}{dr} \right)^2 + m y r W^2 \right] \quad (18)$$

und damit eine erste Kontrolle für die Differentialgleichung (12), wenn man (18) der Euler-Lagrangeschen Ableitung unterwirft, die hier lautet:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\partial F}{\partial W'} \right) - \frac{\partial F}{\partial W} = 0 \quad \text{mit} \quad W' = \frac{dW}{dr}. \quad (19)$$

Man erhält aus (18) nach Weglassung des überall auftretenden Faktors 2:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial W'} &= S r \frac{dW}{dr} - k^2 m J r \frac{dW}{dr}, & \frac{\partial F}{\partial W} &= -k^2 m y r W, \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial F}{\partial W'} \right) &= S \frac{dW}{dr} + S r \frac{d^2 W}{dr^2} - k^2 m J \frac{dW}{dr} - k^2 r \frac{d}{dr} \left( m J \frac{dW}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Führt man diese Ergebnisse (20) in (19) ein, so erhält man:

$$S \frac{dW}{dr} = S r \frac{d^2 W}{dr^2} - k^2 m J \frac{dW}{dr} - k^2 r \frac{d}{dr} \left( m J \frac{dW}{dr} \right) + k^2 m y r W$$

oder

$$S \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) = k^2 \frac{d}{dr} \left( m J r \frac{dW}{dr} \right) - k^2 m y r W.$$

Hiermit ist (12) bestätigt. Die Durchführung der Variation in (17) ergibt nach Weglassung des Faktors 2:

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{r_a} \left[ S r \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} - m y r \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} - m J r \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r \partial t} \right] dr dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \left[ r_a k_a w_a \delta w_a - r_a M_a \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_a \left( \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right)_a \right] dt = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Bedenkt man, daß  $m$ ,  $y$ ,  $J$  hierin nur von  $r$ , nicht aber von  $t$  abhängen und unterwirft den 1. Term des Doppelintegrals der partiellen Integration nach  $r$ , den 2. einer solchen nach  $t$ , den 3. einer solchen zuerst nach  $r$  und dann nach  $t$  und schließlich den 2. Term des einfachen Integrals einer partiellen Integration nach  $t$  mit nachträglicher Einsetzung  $r = r_a$ , so erhält man der Reihe nach:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{a) } \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{r_a} S r \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} dr dt &= \int_{t_0}^{t_1} S r \frac{\partial w}{\partial r} \delta w dt \Big|_0^{r_a} - S \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{r_a} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \delta w dr dt, \\
 \text{b) } \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{r_a} m y r \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} dr dt &= \int_{t_0}^{t_1} m y r \frac{\partial w}{\partial t} \delta w dr \Big|_0^{r_a} - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{r_a} m y r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dr dt, \\
 \text{c) } \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{r_a} m J r \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r \partial t} dr dt &= \int_{t_0}^{t_1} m J r \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} dt \Big|_0^{r_a} - \\
 &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{r_a} \frac{\partial}{\partial r} \left( m J r \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial t} dr dt = m J r \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \delta w \Big|_{t_0}^{t_1} - \\
 &\quad - \int_{t_0}^{t_1} m J r \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial t^2} \delta w dt \Big|_0^{r_a} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial r} \left( m J r \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \right) \delta w dr \Big|_{t_0}^{t_1} + \\
 &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{r_a} \frac{\partial}{\partial r} \left( m J r \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial t^2} \right) \delta w dr dt, \\
 \text{d) } \int_{t_0}^{t_1} r_a M_a \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_a \left( \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right)_a dt &= r_a M_a \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_a \delta w_a \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} r_a M_a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_a \delta w_a dt.
 \end{aligned} \right\} \quad (22a-d)$$

In diesen Ergebnissen verschwinden zunächst die unterstrichenen Terme, da  $\delta w$  und  $\delta w_a$  zu den beiden Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_1$  verschwinden. Die Einführung von (22a bis d) in (21) ergibt somit nach Weglassung der voll unterstrichenen Glieder:

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_0}^{t_1} \int_0^{r_a} \left[ -S \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + m y r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left( m J r \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial t^2} \right) \right] \delta w dr dt + \\
 &+ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[ S \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \delta w + \left( m J r \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial t^2} \right) \delta w \right]_{r=0}^{r_a} + r_a k_a w_a \delta w_a + r_a M_a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_a \delta w_a \right\} dt = 0.
 \end{aligned}$$

Da die Variation  $\delta w$  bis auf ihr Verschwinden an den Zeitgrenzen  $t_0$  und  $t_1$  bei Erfüllung der bekannten Stetigkeitseigenschaften willkürlich ist, so erkennt man im notwendigen Verschwinden des Integranden des Doppelintegrals wieder Gl. (8b), die somit eine abermalige Kontrolle erfährt. Setzt man in den zwei ersten Termen des einfachen Integrals die obere Grenze  $r_a$  ein, so erhalten alle Glieder die willkürliche Variation  $\delta w_a$  an der Grenze  $r = r_a$  und das notwendige Verschwinden des Integranden ohne  $\delta w_a$  liefert nach Abspaltung des nicht verschwindenden Faktors  $r_a$  sofort die dynamische Randbedingung (9b), die somit ebenfalls bestätigt erscheint. Setzt man schließlich in die beiden ersten Terme des einfachen Integrals die untere Grenze  $r = 0$  ein, so verbleiben zwei Glieder, die außer dem verschwindenden Faktor  $r$  noch die willkürliche Variation  $\delta w_0$  enthalten. Nach Abspaltung dieser beiden Faktoren, von denen die Beibehaltung des ersteren nur ein triviales Ergebnis liefert, verbleibt die Beziehung:

$$\left( S + m_0 J_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_0 = 0.$$

Da dies für alle Zeitpunkte  $t$  erfüllt sein soll, erkennt man als notwendige Forderung die Erfüllung der Randbedingung (9a)<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Man vgl. hierzu die Arbeit des Verf.: Eigenschwingungen von Saiten mit elastisch befestigten Enden, Federhofer-Girkmann-Festschrift 37-56 (1950), wo die Formulierung des Eigenwertproblems ebenfalls mittels des Prinzips von Hamilton erfolgte.



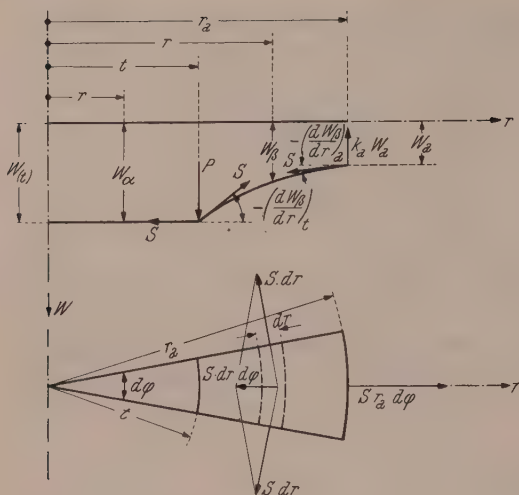


Abb. 3. Meridianschnitt durch die statischen Auslenkungen  $W_\alpha$  für  $0 \leq r \leq t$  und  $W_\beta$  für  $t \leq r \leq r_a$  einer Kreismembran, wenn diese im Kreise  $r = t$  durch die statische Ringlast  $P$  kp/cm belastet ist. Im Grundriß ist ein Membransektor mit den horizontalen Kräften eingezeichnet, die an seinen Meridianschnitten und an seinem Außenrand angreifen

#### IV. Die Integrodifferentialgleichung des Eigenwertproblems

Neben den Vorteilen, die dadurch für die näherungsweise numerischen Verfahren gewonnen werden, bietet die Integrodifferentialgleichung die Möglichkeit einer weiteren Kontrolle der Grundgleichungen.

In der Abb. 3 ist der Schnitt durch die Meridiankurve einer Membran dargestellt, die längs des Kreises  $r = t$  durch eine Last  $P$  kp/cm je Längeneinheit in axialer Richtung statisch belastet ist. Im Grundriß ist hierzu ein Membransektor vom Zentriwinkel  $d\varphi$  gezeichnet. Auch alle anderen in der Abbildung eingezeichneten Kräfte, wie  $S$  und  $k_a W_a$ , sind auf die Längeneinheit bezogen.

Im statischen Falle ist  $k = 0$  und aus (12) folgen für die Auslenkungen  $W_\alpha$ ,  $W_\beta$  nach einfacher Integration aus  $\frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) = 0$  mit  $A$  und  $B$  als Integrationskonstanten:

$$W_\alpha(r) = W(t) = \text{konst. für } 0 \leq r \leq t;$$

$$\frac{dW_\beta}{dr} = \frac{A_\beta}{r}; \quad W_\beta(r) = A_\beta \ln r + B_\beta \quad \text{für } t \leq r \leq r_a. \quad (23a-c)$$

Ein Ringschnitt rechts und links von  $P$  ergibt in Richtung  $W$  nach Abb. 3 die Gleichgewichtsbedingung:

$$\left[ S \sin \left( -\frac{dW_\beta}{dr} \right)_t + S \sin 0 \right] \cdot 2\pi t = P \cdot 2\pi t,$$

somit:

$$A_\beta = -\frac{Pt}{S}; \quad \frac{dW_\beta}{dr} = -\frac{Pt}{S} \frac{1}{r}; \quad W_\beta = -\frac{Pt}{S} \ln r + B_\beta. \quad (24a, b, c)$$

Hierbei wurde unter Vernachlässigung von dritter Ordnung kleiner Größen der  $\sin$  durch sein Argument ersetzt. Beachtet man ferner die dynamische Randbedingung (13b) und führt für  $\frac{dW_\beta}{dr}$  und  $W_\beta$  (24b, c) ein, so erhält man zunächst:

$$-P \frac{t}{r_a} - k_a \frac{P}{S} t \ln r_a + k_a B_\beta + k^2 \frac{P}{S} t \left( \frac{mJ}{r} \right)_a + k^2 \frac{P}{S} t M_a \ln r_a - k^2 M_a B_\beta = 0.$$

Nach Multiplikation mit  $r_a S$  und Isolierung der Glieder mit  $B_\beta$  folgt:

$$Pt [S + r_a k_a \ln r_a - k^2 (m_a J_a + r_a M_a \ln r_a)] = B_\beta r_a (k_a - k^2 M_a) S.$$

Hieraus erfolgt neben  $A_\beta$  in (24a) der Wert der Konstanten  $B_\beta$  zu:

$$B_\beta = \frac{Pt}{S} \frac{Z}{N} \quad \text{mit} \quad Z = S + r_a k_a \ln r_a - k^2 (m_a J_a + r_a M_a \ln r_a) \quad \text{und} \quad N = r_a (k_a - k^2 M_a). \quad (25)$$

Hiermit ergibt sich für  $W_\alpha$  nach (23a) und für  $W_\beta$  nach (24c) mit (25), wenn man die abkürzenden Bezeichnungen  $Z$  und  $N$  beachtet:

$$W_\alpha = W(t) = -\frac{Pt}{S} \ln t + \frac{Pt}{S} \frac{Z}{N} = \frac{Pt}{SN} (Z - N \ln t) \quad \text{für} \quad 0 \leq r \leq t,$$

$$W_\beta = W(r) = -\frac{Pt}{S} \ln r + \frac{Pt}{S} \frac{Z}{N} = \frac{Pt}{SN} (Z - N \ln r) \quad \text{für} \quad t \leq r \leq r_a.$$

Nach Einführung von  $Z$  und  $N$  aus (25) und einigen Umformungen erhält man:

$$\left. \begin{aligned} W_\alpha &= W(t) = \frac{P t}{S N} \left[ S + r_a k_a \ln \frac{r_a}{t} - k^2 \left( m_a J_a + r_a M_a \ln \frac{r_a}{t} \right) \right] \text{ für } 0 \leq r \leq t, \\ W_\beta &= W(r) = \frac{P t}{S N} \left[ S + r_a k_a \ln \frac{r_a}{r} - k^2 \left( m_a J_a + r_a M_a \ln \frac{r_a}{r} \right) \right] \text{ für } t \leq r \leq r_a. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Setzt man zur Probe in  $W_\beta$   $r = r_a$ , so verschwinden die logarithmischen Glieder und man erhält bei Beachtung von Gl. (24b), in die für  $r = r_a$  einzusetzen ist:

$$(W_\beta)_{r=r_a} = W_a = \frac{P t}{S r_a} \frac{S - k^2 m_a J_a}{k_a - k^2 M_a} = - \left( \frac{dW}{dr} \right)_a \frac{S - k^2 m_a J_a}{k_a - k^2 M_a}.$$

Schließlich folgt dann aus der letzten Gleichung:

$$\begin{aligned} W_a (k_a - k^2 M_a) &= - \left( \frac{dW}{dr} \right)_a (S - k^2 m_a J_a) \\ \text{oder} \quad S \left( \frac{dW}{dr} \right)_a + k_a W_a &= k^2 \left[ m_a J_a \left( \frac{dW}{dr} \right)_a + M_a W_a \right]. \end{aligned}$$

Hiermit aber ist wieder die Randbedingung (13b) erhalten worden. Läßt man anderseits  $t$  gegen Null gehen, so sind in  $W_\alpha$  bloß die Glieder mit  $t \ln \frac{r_a}{t}$  entscheidend, die aber, wie man leicht erkennt, mit  $t$  ebenfalls gegen Null gehen. Dann ist also auch  $\lim_{t \rightarrow 0} W_\alpha = 0$  und dies ist auch anschaulich einzusehen, da ja dann bei konstantem  $P$  wegen des zu einem Punkt zusammengeschrunpften Kreises  $r = t$  überhaupt keine

endliche Last im Zentrum angreift. Schließlich erkennt man aus dem Grundriß von Abb. 3, daß auch in Richtung  $r$  Gleichgewicht besteht, denn die Summe aller

zum Mittelpunkt 0 hinggerichteten Spannungskomponenten ist offenbar  $- S d\varphi \int_0^{r_a} dr = - S r_a d\varphi$  und ebenso groß ist die in Richtung  $+r$  wirkende Spannkraft am Umfange  $r_a d\varphi$  des Außenkreises der Membran.

In Wirklichkeit greifen aber beim Schwingvorgang statt der statischen Kraft  $P$  gemäß Abb. 1 am Kreise  $r = t$  folgende Kräfte in Richtung  $w$  bzw.  $W$  an:

1. Die elementare Trägheitskraft  $dT_r$

$$dT_r(t) = - m(t) y(t) t d\varphi dt \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = k^2 m(t) y(t) t d\varphi dt W(t) T(\tilde{t}),$$

wenn für stehende Wellen sogleich der Ansatz (10) benutzt wird und die Zeit mit  $\tilde{t}$  bezeichnet wird.

2. Die durch die Rotationsträgheit verursachte Querkraftsdifferenz, wobei aber zu beachten ist, daß sich die Angriffsfläche an der rechten Seite des Elementes auf  $(t + dt) y d\varphi$  gegenüber  $t y d\varphi$  links vergrößert hat, was am kürzesten durch die Änderung des Produktes  $Q_r t$  dargestellt wird [man vgl. Gl. (6)]:

$$\frac{\partial(Q_r t)}{\partial t} dt d\varphi = \frac{\partial}{\partial t} \left[ m(t) J(t) t \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial \tilde{t}^2} \right] dt d\varphi = - k^2 \frac{d}{dt} \left[ m(t) J(t) t \frac{dW(t)}{dt} \right] dt d\varphi T(\tilde{t}).$$

Bezieht man beide elementaren Trägheitskräfte ebenso wie  $P$  auf die Längeneinheit in azimuthaler Richtung, so hat man durch  $t d\varphi$  zu teilen und erhält dann nach Weglassung des Zeitfaktors  $T(\tilde{t})$  für die Amplitudenauslenkung  $W(t)$  als dynamische Belastung  $dP_a$  je Längeneinheit [statt  $P$  in (26)]

$$dP_a(t) = k^2 H(t) dt \quad \text{mit} \quad H(t) = m(t) y(t) W(t) - \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left[ m(t) J(t) t \frac{dW(t)}{dt} \right]. \quad (27)$$

Diese Trägheitskräfte rufen für  $0 \leq r \leq t$  nach (26) die elementare Auslenkung  $dW_\alpha$  und für  $t \leq r \leq r_a$  ebenso  $dW_\beta$  hervor und man gewinnt die ganze endliche Auslenkung

der Membran-Meridiankurve, wenn man alle Trägheitskräfte  $dP_d(t)$  erfaßt und die durch sie bedingten Elementarauslenkungen summiert, was wegen der Linearität der Differentialgleichung (12) zulässig ist. Man erfaßt aber alle Trägheitskräfte, wenn man nach Einführung derselben statt  $P$  in (26) nach  $t$  für  $W_\beta$  zwischen 0 und  $r$  und für  $W_\alpha$  zwischen  $r$  und  $r_a$  integriert. In zusammengefaßter Schreibweise erhält man so:

$$W(r) = \frac{k_a^2}{S} \left\{ \int_0^r \frac{1}{N} \left[ S + r_a k_a \ln \frac{r_a}{r} - k^2 \left( m_a J_a + r_a M_a \ln \frac{r_a}{r} \right) \right] t H(t) dt + \right. \\ \left. + \int_r^{r_a} \frac{1}{N} \left[ S + r_a k_a \ln \frac{r_a}{t} - k^2 \left( m_a J_a + r_a M_a \ln \frac{r_a}{t} \right) \right] t H(t) dt \right\}. \quad (28)$$

Es wird hierbei der nach (25) konstante Faktor  $N$  absichtlich den Integranden zugesellt, die so in ihren Vorfaktoren  $\frac{1}{N}$  [...] dimensionslos erscheinen, denn  $N$ , wie auch die Ausdrücke in [...] haben ja die Dimension  $MT^{-2}$ . (28) ist wegen  $H(t)$  eine lineare Integrodifferentialgleichung, deren in  $r, t$  symmetrischer Kern noch den Eigenwert  $k^2$  im Zähler, wie im Nenner  $N$  enthält, mit  $t H(t)$  als „Belastungsfunktion“.

Um zu zeigen, daß (28) in der Tat das ganze Eigenwertproblem, also sowohl die Differentialgleichung (12) als auch die beiden Randbedingungen (13a, b) umschließt, ihnen also äquivalent ist, differenziert man (28) zunächst nach  $r$ , wobei man die veränderlichen Integralgrenzen zu beachten hat. Man erkennt dabei, daß sich die Terme außerhalb der Integrale, nämlich:

$$\pm \frac{1}{N} \left[ S + r_a k_a \ln \frac{r_a}{r} - k^2 \left( m_a J_a + r_a M_a \ln \frac{r_a}{r} \right) \right] r H(r),$$

da sie mit entgegengesetzten Vorzeichen auftreten, wegheben, so daß

$$\frac{dW}{dr} = \frac{k^2}{S} \left\{ \int_0^r \frac{1}{N} (k^2 M_a - k_a) \frac{r_a}{r} t H(t) dt - \frac{k^2}{S r} \int_0^r t H(t) dt \right\} \quad (29)$$

verbleibt, wenn man  $N$  in (25) beachtet und bedenkt, daß das zweite Integral in (28) überhaupt keinen Beitrag liefert, da sein Integrand  $r$  nicht enthält. Setzt man in (29)  $r = r_a$ , so folgt:

$$\left( \frac{dW}{dr} \right)_a = - \frac{k^2}{S r_a} \int_0^{r_a} t H(t) dt. \quad (29a)$$

Setzt man anderseits in (28)  $r = r_a$ , so verschwindet das zweite Integral überhaupt, während vom Integranden des ersten die logarithmischen Glieder wegfallen und man

$$W_a = \frac{k_a^2}{S N} \int_0^{r_a} (S - k^2 m_a J_a) t H(t) dt = \frac{k^2}{S r_a} \frac{S - k^2 m_a J_a}{k_a - k^2 M_a} \int_0^{r_a} t H(t) dt \quad (30)$$

erhält. Isoliert man das Integral in (29a) und (30) und setzt die Ergebnisse einander gleich, so erhält man:

$$- \left( \frac{dW}{dr} \right)_a = W_a \frac{k_a - k^2 M_a}{S - k^2 m_a J_a} \quad \text{oder} \quad k^2 \left[ m_a J_a \left( \frac{dW}{dr} \right)_a + M_a W_a \right] = S \left( \frac{dW}{dr} \right)_a + k_a W_a.$$

In letzterer Beziehung aber erkennt man wieder die Randbedingung (13b). Setzt man



andererseits in (29)  $r = 0$ , so folgt sofort  $\left(\frac{dW}{dr}\right)_0 = 0$ , also wieder die Randbedingung (13a)<sup>4a</sup>. Differenziert man (29) nochmals nach  $r$  und bedenkt, daß nach (29)

$$\frac{k^2}{S} \int_0^r t H(t) dt = -r \frac{dW}{dr} \quad (29b)$$

ist, so erhält man bei Beachtung der veränderlichen oberen Grenze:

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{k^2}{S} \int_0^r t H(t) dt - \frac{k^2}{S} \frac{1}{r} r H(r) = -\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{k^2}{S} H(r),$$

wobei (29b) bereits verwertet wurde. Multipliziert man dieses Ergebnis mit  $r$  und beachtet, daß nach (27)

$$r H(r) = m(r) y(r) r W(r) - \frac{d}{dr} \left[ m(r) J(r) r \frac{dW(r)}{dr} \right] \quad (31)$$

ist, so erhält man

$$r \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{dW}{dr} = \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) = -\frac{k^2}{S} \left[ m y r W - \frac{d}{dr} \left( m J r \frac{dW}{dr} \right) \right].$$

Hierin aber erkennt man wieder die Differentialgleichung (12).

Da sich also aus der Integrodifferentialgleichung (28) sowohl die Differentialgleichung (12) wie auch beide Randbedingungen (13a, b) herleiten ließen, erweist sie sich der Formulierung des Eigenwertproblems durch letztere äquivalent. In zusammengefaßter Schreibweise kann man nun (28) wegen (31) so darstellen:

$$W(r) = \frac{k^2}{S} \int_0^{r_a} K(r, t) \left[ m(t) y(t) t W(t) - \frac{d}{dt} \left( m(t) J(t) t \frac{dW(t)}{dt} \right) \right] dt, \quad (32)$$

$$\text{mit } K(r, t) = \begin{cases} \frac{S + r_a k_a \ln \frac{r_a}{r} - k^2 \left( m_a J_a + r_a M_a \ln \frac{r_a}{r} \right)}{r_a (k_a - k^2 M_a)} & \text{für } 0 \leq t \leq r \\ \frac{S + r_a k_a \ln \frac{r_a}{t} - k^2 \left( m_a J_a + r_a M_a \ln \frac{r_a}{t} \right)}{r_a (k_a - k^2 M_a)} & \text{für } r \leq t \leq r_a. \end{cases}$$

$K(r, t)$  ist wohl symmetrisch in  $r, t$ , enthält aber den Eigenwert  $k^2$  sowohl im Zähler wie im Nenner in linearer Form. Nur bei Nichtbeachtung der Rotationsträgheit geht (32) mit  $J = J_a = 0$  in eine Integralgleichung über, deren Kern gleichwohl noch  $k^2$  im Zähler wie im Nenner enthält:

$$a) \quad W(r) = \frac{k^2}{S} \int_0^{r_a} K(r, t) m(t) y(t) t W(t) dt \quad (32a)$$

$$\text{mit } K_a(r, t) = \begin{cases} \frac{S + r_a \left( k_a \ln \frac{r_a}{r} - k^2 M_a \ln \frac{r_a}{r} \right)}{r_a (k_a - k^2 M_a)} & \text{für } 0 \leq t \leq r \\ \frac{S + r_a \left( k_a \ln \frac{r_a}{t} - k^2 M_a \ln \frac{r_a}{t} \right)}{r_a (k_a - k^2 M_a)} & \text{für } r \leq t \leq r_a. \end{cases}$$

<sup>4a</sup> Zunächst folgt wegen  $H(t)$  in (27):  $\left(\frac{dW}{dr}\right)_0 \left(1 - \frac{m_0 J_0}{S} k^2\right) = -\frac{k^2}{S} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \int_0^r m y t W dt\right) = 0$ , da  $m_0$  und  $y_0$  endliche Werte besitzen,  $W_0$  aber eine unendlich kleine Größe darstellt.

Die Differentialgleichung (12) und die Randbedingung (13b) vereinfachen sich zu:

$$S \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) + k^2 m y r W = 0; \quad S \left( \frac{dW}{dr} \right)_a + k_a W_a = k^2 M_a W_a. \quad \text{Zu Gl. (32a)}$$

Kann man in (32a) auch die Masse des Fassungsringes vernachlässigen, so erhält man für den Kern der Integralgleichung (32a) mit  $M_a = 0$ :

$$b) \quad K_b(r, t) = \begin{cases} \frac{S + r_a k_a \ln \frac{r_a}{r}}{r_a k_a} & \text{für } 0 \leq t \leq r \\ \frac{S + r_a k_a \ln \frac{r_a}{t}}{r_a k_a} & \text{für } r \leq t \leq r_a. \end{cases} \quad (32b)$$

Die Differentialgleichung bleibt wie in (32a), aber die dynamische Randbedingung vereinfacht sich weiter zu:

$$S \left( \frac{dW}{dr} \right)_a + k_a W_a = 0. \quad \text{Zu Gl. (32b)}$$

Sie enthält ebenso wie der Kern  $K_b(r, t)$  den Eigenwert  $k^2$  nicht mehr. Ist der Außenrand der Membran unnachgiebig festgehalten, so folgt aus (13b) mit  $k_a = \infty$   $W_a = 0$ , wie es sein muß, und aus (32b) ergibt sich:

$$c) \quad K_c(r, t) = \begin{cases} \ln \frac{r_a}{r} & \text{für } 0 \leq t \leq r \\ \ln \frac{r_a}{t} & \text{für } r \leq t \leq r_a. \end{cases} \quad (32c)$$

Einem Sprachgebrauch aus der Theorie der Saitenschwingungen folgend, könnte man  $K_c$  in (32c) auch als „Musterkern für die Schirmschwingungen der Kreismembran“ bezeichnen.

Natürlich lassen sich noch weitere interessante Spezialfälle angeben, die zum Teil in späteren Arbeiten besprochen werden sollen<sup>5</sup>.

## V. Einführung dimensionsloser Größen. Wichtige Eigenschaften des Problems

Es mögen alle mit dem Zeiger  $v$  versehenen Größen sich auf einen an sich willkürlich angenommenen Vergleichsringschnitt mit dem Halbmesser  $r = r_v$  beziehen. Die Dichte des Membranmaterials sei dort  $m_v$ , die Dicke  $y_v$  und das auf die azimutale Längeneinheit bezogene axiale Schnittflächenträgheitsmoment  $J_v$ . Ist ferner dort  $i_v$  der zugehörige Trägheitshalbmesser, so gilt

$$J_v = q_v \cdot i_v^2 = y_v \cdot i_v^2; \quad \frac{m(r)}{m_v} = \mu(\varrho); \quad \frac{y(r)}{y_v} = K(\varrho); \quad \frac{J(r)}{J_v} = I(\varrho). \quad (33a-d)$$

Für  $r_v$  kann im besonderen auch Null oder  $r_a$  gewählt werden.  $\varrho$  ist durch (34b) erklärt. Es ist neben  $\eta$  als abhängig Veränderlicher als unabhängig Veränderliche eingeführt, indem der Außenhalbmesser  $r_a$  als Bezugsgröße dient:

$$\frac{t}{r_a} = \tau; \quad \frac{r}{r_a} = \varrho; \quad \frac{W}{r_a} = \eta; \quad \frac{dW}{dr} = \frac{d\eta}{d\varrho}; \quad \frac{d^2W}{dr^2} = \frac{1}{r_a} \frac{d^2\eta}{d\varrho^2}; \quad \frac{i_v^2}{r_a^2} = \sigma. \quad (34a-f)$$

(34a) bezieht sich ebenso wie (34b) auf die abhängig Veränderliche, deren doppelte Bezeichnungsweise in Abschnitt IV benötigt wurde. Die in (34f) definierte Größe  $\sigma$  (eine im allgemeinen sehr kleine Zahl, die dem bekannten „Schlankheitsgrad“ verkehrt proportional ist) bezieht den Trägheitshalbmesser des Vergleichsquerschnittes auf den Außenhalbmesser und ist ein Maß für das Flächenträgheitsmoment  $J$ . Wird

<sup>5</sup> Sie behandeln die Schirmschwingungen von Kreisringmembranen bei homogenem und inhomogenem statischem Spannungszustand und unter allgemeinen Bedingungen. Dabei wird sich auch eine weitere willkommene Kontrolle aller hier gewonnenen Resultate ergeben.

schließlich noch ein dimensionsloser Eigenwert  $u$  eingeführt und ebenso eine dimensionslose Verhältniszahl  $\alpha_a$  für die Masse je Längeneinheit  $M_a$  des Halteringes und  $\kappa_a$  für dessen elastische Lagerung gemäß

$$u = \frac{k^2 m_v y_v r_a^2}{S}; \quad \alpha_a = \frac{M_a}{m_v y_v r_a}; \quad \kappa_a = \frac{k_a r_a}{S}, \quad (35a-c)$$

so lassen sich, wie im folgenden angegeben ist, alle bisher gewonnenen Beziehungen sehr übersichtlich in dimensionsloser Form angeben. Die Größe  $\alpha_a$  in (35b) gestattet eine sehr anschauliche Deutung, wenn man Zähler und Nenner mit  $2 r_a \pi$  multipliziert:

$$\alpha_a = \frac{M_a \cdot 2 r_a \pi}{2 m_v y_v r_a^2 \pi}.$$

Es bedeutet dann  $\alpha_a$  das Verhältnis der ganzen Ringmasse zur doppelten Masse einer zylindrischen Scheibe, die zur Grundfläche die Membranfläche und zur Höhe und Dichte die Dicke der Membran und ihre Dichte im Vergleichsringschnitt besitzt. Ebenso ist  $\kappa_a$  anschaulich zu deuten als Verhältnis der auf die azimutale Längeneinheit bezogene elastische Rückführungskraft bei einer Auslenkung gleich dem Membranhalfmesser zur ebenso bezogenen Membranspannung  $S$ .

Wie man leicht errechnet, nehmen nun die Differentialgleichung (12) sowie die Randbedingungen (13a, b) folgende einfache Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right) &= u \left[ \sigma \frac{d}{d\rho} \left( \mu I \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right) - \mu K \rho \eta \right]; \quad \left( \frac{d\eta}{d\rho} \right)_0 = 0; \\ \left( \frac{d\eta}{d\rho} \right)_a + \kappa_a \eta_a &= u \left[ \sigma \mu_a I_a \left( \frac{d\eta}{d\rho} \right)_a + \alpha_a \eta_a \right]. \end{aligned} \right\} \quad (36a-c)$$

Statt (36c) kann man die dynamische Randbedingung auch in der Form schreiben:

$$\left( \frac{d\eta}{d\rho} \right)_a (1 - u \sigma \mu_a I_a) + \eta_a (\kappa_a - u \alpha_a) = 0. \quad (36c)$$

Aus (31) folgt zunächst mittels der Einführungen (33) bis (35):

$$r H(r) = \mu m_v K y_v \rho r_a \eta r_a - \frac{1}{r_a} \frac{d}{d\rho} \left( \mu m_v I J_v \rho r_a \frac{d\eta}{d\rho} \right)$$

oder

$$r H(r) = m_v y_v r_a^2 \cdot \mu K \eta \rho - m_v y_v \rho^2 \frac{d}{d\rho} \left( \mu I \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right) = m_v y_v r_a^2 \left[ \mu K \rho \eta - \sigma \frac{d}{d\rho} \left( \mu I \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right) \right]. \quad (37)$$

Andererseits folgt aus dem Kern  $K(r, t)$  in (32), nachdem man dort Zähler und Nenner durch  $S$  geteilt und  $\ln \frac{1}{\rho}$  durch  $-\ln \rho$  usw. ersetzt hat:

$$K(\rho, \tau) = \begin{cases} \frac{1 - \kappa_a \ln \rho + u (\alpha_a \ln \rho - \sigma \mu_a I_a)}{\kappa_a - u \alpha_a} & \text{für } 0 \leq \tau \leq \rho, \\ \frac{1 - \kappa_a \ln \tau + u (\alpha_a \ln \tau - \sigma \mu_a I_a)}{\kappa_a - u \alpha_a} & \text{für } \rho \leq \tau \leq 1. \end{cases} \quad (38)$$

Führt man nun (37) und (38) in die Integrodifferentialgleichung (32) ein, so erhält man diese in dimensionsloser Form zu:

$$\eta(\rho) = u \int_0^1 K(\rho, \tau) \left\{ \mu(\tau) K(\tau) \tau \eta(\tau) - \sigma \frac{d}{d\tau} \left[ \mu(\tau) I(\tau) \tau \frac{d\eta(\tau)}{d\tau} \right] \right\} d\tau. \quad (39)$$

Mit der Abkürzung

$$\bar{H}(\tau) = \mu(\tau) K(\tau) \tau \eta(\tau) - \sigma \frac{d}{d\tau} \left[ \mu(\tau) I(\tau) \tau \frac{d\eta(\tau)}{d\tau} \right] \quad (37a)$$



kann man (39) mit (38) kürzer in der Form schreiben:

$$\eta(\varrho) = u \int_0^1 K(\varrho, \tau) \cdot \bar{H}(\tau) d\tau. \quad (39a)$$

Ausführlicher geschrieben hat man für (39a):

$$\eta(\varrho) = u \left[ \int_0^{\varrho} \frac{1 - \kappa_a \ln \varrho + u (\alpha_a \ln \varrho - \sigma \mu_a I_a)}{\kappa_a - u \alpha_a} \bar{H}(\tau) d\tau + \int_{\varrho}^1 \frac{1 - \kappa_a \ln \tau + u (\alpha_a \ln \tau - \sigma \mu_a I_a)}{\kappa_a - u \alpha_a} \bar{H}(\tau) d\tau \right]. \quad (39b)$$

Durch fortgesetztes Differenzieren kann man auch aus (39b) wieder zur Formulierung des Eigenwertproblems der Gl. (36a bis c) zurückgelangen, was hier unterbleiben kann.

Auch die früher unterschiedenen Fälle a bis c lassen sich nun leicht in dimensionsloser Form darstellen.

$$a) \quad \sigma = 0: \quad \eta(\varrho) = u \int_0^1 K_a(\varrho, \tau) m(\tau) K(\tau) \tau \eta(\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{l} K_a(\varrho, \tau) = \begin{cases} \frac{1 - \kappa_a \ln \varrho + u \alpha_a \ln \varrho}{\kappa_a - u \alpha_a} & \text{für } 0 \leq \tau \leq \varrho, \\ \frac{1 - \kappa_a \ln \tau + u \alpha_a \ln \tau}{\kappa_a - u \alpha_a} & \text{für } \varrho \leq \tau \leq 1. \end{cases} \end{array} \right. \quad (40)$$

Aus (36a bis c) erhält man analog mit  $\sigma = 0$ :

$$\frac{d}{d\varrho} \left( \varrho \frac{d\eta}{d\varrho} \right) + u \mu K \varrho \eta = 0; \quad \left( \frac{d\eta}{d\varrho} \right)_0 = 0; \quad \left( \frac{d\eta}{d\varrho} \right)_a + \kappa_a \eta_a = u \alpha_a \eta_a. \quad (40a-c)$$

b) Setzt man in (40) und (40c) überdies noch  $\alpha_a = 0$ , wie es der Vernachlässigung der Masse des Fassungsringes entspricht, so erhält man:

$$K_b(\varrho, \tau) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \kappa_a \ln \varrho}{\kappa_a} \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq \varrho \\ \frac{1 - \kappa_a \ln \tau}{\kappa_a} \quad \text{für } \varrho \leq \tau \leq 1 \end{array} \right\}; \quad \left( \frac{d\eta}{d\varrho} \right)_a + \kappa_a \eta_a = 0. \quad (41)$$

c) Läßt man in (41) außerdem  $\kappa_a$  gegen  $\infty$  gehen, wie es fester Lagerung entspricht, so folgt als dimensionslose Darstellung des Musterkerns für Schirmschwingungen:

$$K_c(\varrho, \tau) = \left\{ \begin{array}{l} -\ln \varrho \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq \varrho \\ -\ln \tau \quad \text{für } \varrho \leq \tau \leq 1 \end{array} \right\}; \quad \eta_a = 0. \quad (42)$$

Die Differentialgleichung (40a) und die Randbedingung (40b) bleibt in allen diesen Fällen ungeändert. Weitere Spezialfälle sollen späterhin behandelt werden<sup>5</sup>.

Um gewisse wichtige und allgemeine Eigenschaften des vorliegenden Eigenwertproblems zu erweisen, möge mit E. Kamke<sup>6</sup> der Differentialgleichung (12) die Gestalt gegeben werden:

$$F(\eta) = u G(\eta); \quad F(\eta) = \sum_{v=0}^m (-1)^v [f_v(\varrho) \eta^{(v)}(\varrho)]^{(v)}; \quad G(\eta) = \sum_{v=0}^n (-1)^v [g_v(\varrho) \eta^{(v)}(\varrho)]^{(v)}, \quad (43)$$

wobei im allgemeinen  $n \leq m$  und  $f_m(\varrho) \neq 0$ ;  $g_n(\varrho) \neq 0$  im Intervall  $<0,1>$  sein sollen. Man erkennt aus (43), daß  $F$  und  $G$  lineare, homogene, selbstadjungierte Differential-

<sup>6</sup> E. Kamke: Über die definiten, selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Math. Z. 46, 231—250, 251—286 (1940).

ausdrücke sind, deren Funktionen  $f_\nu$  und  $g_\nu$  als reell und  $\nu$ -mal stetig differenzierbar vorausgesetzt sind. Die Differentialgleichung (12) in der Gestalt (43) lautet nun:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right) &= u \left[ \mu K \rho \eta - \sigma \frac{d}{d\rho} \left( \mu I \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right) \right], \quad \text{so daß} \\ m=1; \quad f_0 &= 0; \quad f_1 = \rho, \quad \text{somit} \quad F(\eta) = -\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right), \\ n=1; \quad g_0 &= \mu K \rho; \quad g_1 = \sigma \mu I \rho, \quad \text{somit} \quad G(\eta) = \mu K \rho \eta - \sigma \frac{d}{d\rho} \left( \mu I \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Da  $n > 0$  ist, gehört das vorliegende Problem<sup>7</sup> zur Gruppe der „Allgemeinen Eigenwertprobleme“. Sind dann  $v(\rho)$  und  $w(\rho)$  in  $<0,1>$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen, die außerdem die Randbedingungen (36b, c) erfüllen, wie etwa für konstante Dicke ( $K=1$ ) und Dichte ( $\mu=1$ )

$$v(\rho) = 2(1 - u\sigma) + (\kappa_a - u\alpha_a)(1 - \rho^2), \quad (45a)$$

$$w(\rho) = 3(1 - u\sigma) + (\kappa_a - u\alpha_a)(1 - \rho^3), \quad (45b)$$

die, allerdings im engeren Sinne, wenn nämlich der Eigenwert nicht in den Randbedingungen und daher auch nicht in der Greenschen Funktion des Problems enthalten ist, E. Kamke<sup>6</sup> „zulässige Funktionen“, L. Collatz<sup>7</sup> jedoch „Vergleichsfunktionen“ nennt, so erkennt man, daß die Bedingungen der Selbstadjungiertheit:

$$\int_0^1 [vF(w) - wF(v)] d\rho = 0; \quad \int_0^1 [vG(w) - wG(v)] d\rho = 0 \quad (46a, b)$$

erfüllt sind, denn nach (44) erhält man aus (46a):

$$\begin{aligned} \int_0^1 [vF(w) - wF(v)] d\rho &= - \int_0^1 \left[ v d \left( \rho \frac{dw}{d\rho} \right) - w d \left( \rho \frac{dv}{d\rho} \right) \right] = - \left[ v \rho \frac{dw}{d\rho} - w \rho \frac{dv}{d\rho} \right]_0^1 + \\ &+ \int_0^1 \rho \left[ \frac{dv}{d\rho} \frac{dw}{d\rho} - \frac{dw}{d\rho} \frac{dv}{d\rho} \right] d\rho = - \left[ \left( v \frac{dw}{d\rho} \right)_a - \left( w \frac{dv}{d\rho} \right)_a \right] = 0, \end{aligned}$$

denn an der unteren Grenze  $\rho=0$  verschwindet der verbliebene integralfreie Term auch wegen (36b). Wegen der dynamischen Randbedingung in der Form von Gl. (36c) folgt aber

$$v_a \left( \frac{dw}{d\rho} \right)_a = v_a \frac{u\alpha_a - \kappa_a}{1 - u\sigma\mu_a I_a} w_a$$

und genau derselbe Ausdruck folgt für  $w_a \left( \frac{dv}{d\rho} \right)_a$ . Ebenso ergibt sich aus (46b), da auch hier nur der integralfreie Term verbleibt:

$$\int_0^1 [vG(w) - wG(v)] d\rho = -\sigma\mu_a I_a \left[ \left( v \frac{dw}{d\rho} \right)_a - \left( w \frac{dv}{d\rho} \right)_a \right] = 0$$

wie oben. Aus der eben bewiesenen Erfüllung von (46a, b) erschließt man die verallgemeinerte Orthogonalität der zu zwei verschiedenen Eigenwerten  $u_i$  und  $u_k$  gehörigen Eigenfunktionen  $\eta_i$  und  $\eta_k$ , die mit Beachtung von (44) im vorliegenden Falle lauten wird:

$$\int_0^1 \eta_i \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\eta_k}{d\rho} \right) d\rho = 0; \quad \int_0^1 \eta_i \left[ \mu K \rho \eta_k - \sigma \frac{d}{d\rho} \left( \mu I \rho \frac{d\eta_k}{d\rho} \right) \right] d\rho = 0. \quad (47a, b)$$

<sup>7</sup> L. Collatz: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, insbesondere S. 46. 1949. — R. Zurmühl: Praktische Mathematik, VIII. Kapitel: Rand- und Eigenwertaufgaben, S. 376–474. 1953.

Es soll nun weiterhin geprüft werden, unter welchen Voraussetzungen das vorliegende Eigenwertproblem eigentlich definit oder definit im engeren Sinne (Bezeichnungsweise von E. Kamke<sup>6</sup>) bzw. volldefinit ist (Bezeichnungsweise von L. Collatz<sup>7</sup>). Hierzu ist nach L. Collatz<sup>7</sup> die Erfüllung der Ungleichungen für jede Vergleichsfunktion  $v(\varrho)$

$$\int_0^1 v F(v) d\varrho > 0; \quad \int_0^1 v G(v) d\varrho > 0 \quad (48a, b)$$

erforderlich. Aus (48a) folgt mit Rücksicht auf (44):

$$\int_0^1 v F(v) d\varrho = - \int_0^1 v d\left(\varrho \frac{dv}{d\varrho}\right) = - \left[v \varrho \frac{dv}{d\varrho}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dv}{d\varrho} \varrho \frac{dv}{d\varrho} d\varrho = -v_a \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_a + \int_0^1 \varrho \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)^2 d\varrho.$$

Wegen (36c) kann hierin der integralfreie Term auch so umgeformt werden:

$$-v_a \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_a = +v_a^2 \frac{\kappa_a - u \alpha_a}{1 - u \sigma \mu_a I_a},$$

während er an der unteren Grenze ersichtlich verschwindet. Es bleibt somit<sup>8</sup>:

$$\int_0^1 v F(v) d\varrho = v_a^2 \frac{\kappa_a - u \alpha_a}{1 - u \sigma \mu_a I_a} + \int_0^1 \varrho \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)^2 d\varrho. \quad (49a)$$

Den integralfreien Term in (49a) muß man, wenn man sich von der oben erwähnten Beschränkung frei macht, als den zu  $F(v)$  gehörigen „Dirichletschen Randteil“ bezeichnen. Analog erhält man aus (48b) mit (44)

$$\begin{aligned} \int_0^1 v G(v) d\varrho &= \int_0^1 v \mu K \varrho v d\varrho - \sigma \int_0^1 v d\left(\mu I \varrho \frac{dv}{d\varrho}\right) = \int_0^1 \mu K \varrho v^2 d\varrho - \sigma \left[v \mu I \varrho \frac{dv}{d\varrho}\right]_0^1 + \\ &+ \sigma \int_0^1 \mu I \varrho \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)^2 d\varrho. \end{aligned}$$

Hier verschwindet der integralfreie Term wieder an der unteren Grenze 0 und die abermalige Anwendung von (36c) ergibt schließlich<sup>8</sup>:

$$\int_0^1 v G(v) d\varrho = \sigma \mu_a I_a v_a^2 \frac{\kappa_a - u \alpha_a}{1 - u \sigma \mu_a I_a} + \int_0^1 \mu K \varrho v^2 d\varrho + \int_0^1 \mu I \varrho \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)^2 d\varrho. \quad (49b)$$

Der integralfreie Term ist hier der zu  $G(v)$  gehörige „Dirichletsche Randteil“. Da in (49a, b) die Integrale und ebenso die Vorfaktoren der integralfreien Terme wesentlich positive Größen sind, so ist das Eigenwertproblem sicherlich volldefinit, wenn es der Bruch in (49a, b) ist, das heißt wenn mit  $\alpha_a = \sigma = 0$  die Ringmasse vernachlässigt und die Rotationsträgheit nicht beachtet, hingegen die elastische Lagerung des Spannrings in Betracht gezogen wird. Dann aber tritt der Eigenwert in den Randbedingungen und in der Greenschen Funktion nicht auf, das heißt das Eigenwertproblem gehört dann wegen  $f_v \geq 0$ ,  $g_v \geq 0$  in (44) zur großen und weitgehend

<sup>8</sup> Es ist natürlich zur Ermittlung der (stets positiven) Integrale in (49a, b) nicht nötig, jedesmal die partielle Integration durchzuführen, sondern man kann sich hierzu der von L. Collatz, a. a. O. S. 54 angegebenen Formeln bedienen, die hier lauten ( $m = n = 1$ ):

$$\int_0^1 \sum_{\nu=0}^m f_\nu \left(\frac{d^\nu v}{d\varrho^\nu}\right)^2 d\varrho \quad \text{für } F(v) \quad \text{und} \quad \int_0^1 \sum_{\nu=0}^n g_\nu \left(\frac{d^\nu v}{d\varrho^\nu}\right)^2 d\varrho \quad \text{für } G(v).$$



untersuchten Gruppe der  $K$ -definiten Probleme<sup>8a</sup>. Welche Rolle die aus (49a, b) sich ergebenden Schranken

$$u' = \frac{\kappa_a}{\alpha_a}, \quad u'' = \frac{1}{\sigma \mu_a I_a} \quad (50a, b)$$

für das allgemeine Problem spielen, kann hier nicht untersucht werden. Es ist jedenfalls bemerkenswert, daß auch im allgemeinen Falle die durch (46a, b) erklärte Selbstadjungiertheit erhalten bleibt.

## VI. Die strenge Frequenzgleichung für die Membran gleicher Dichte und Dicke

Kontrolle durch das Verfahren von W. Ritz. Durchrechnung einiger Beispiele

Im vorliegenden Falle ist  $\mu = I = K = 1$ . Damit gehen die Differentialgleichung (36a) und die Randbedingungen (36b, c) über in:

$$(1 - u\sigma) \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right) + u \eta \rho = 0; \quad (1 - u\sigma) \left( \frac{d\eta}{d\rho} \right)_a = (u \alpha_a - \kappa_a) \eta_a; \quad \left( \frac{d\eta}{d\rho} \right)_0 = 0. \quad (51a-c)$$

Die Entwicklung von (51a) ergibt:

$$\frac{d^2\eta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\eta}{d\rho} + \frac{u}{1 - u\sigma} \eta = 0. \quad (52)$$

Führt man in (52) die neue unabhängige Veränderliche

$$\xi = \rho \sqrt{\frac{u}{1 - u\sigma}} \quad (53)$$

ein, so läßt sich (52) leicht umformen in:

$$\xi^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \xi \frac{d\eta}{d\xi} + \xi^2 \eta = 0. \quad (54)$$

Der Vergleich von (54) mit der Besselschen Differenzialgleichung<sup>9</sup>

$$\xi^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \xi \frac{d\eta}{d\xi} + (\xi^2 - \nu^2) \eta = 0$$

zeigt, daß im vorliegenden Falle, der die Fächerschwingungen außer Betracht läßt, der Parameter  $\nu = 0$  ist. Vom vollständigen Integral von (54), nämlich von

$$\eta = c_1 J_0(\xi) + c_2 Y_0(\xi)$$

ist aber bei der Vollmembran bekanntlich bloß der erste Term brauchbar, da  $Y_0(\xi)$  für  $\rho = \xi = 0$  gegen unendlich strebt. Mit Rücksicht auf (53) lautet also im vorliegenden Falle die Lösung von (54) ohne die Konstante  $c_1$

$$\eta = J_0(\xi) = J_0 \left( \rho \sqrt{\frac{u}{1 - u\sigma}} \right); \quad \frac{d\eta}{d\rho} = - \sqrt{\frac{u}{1 - u\sigma}} J_1 \left( \rho \sqrt{\frac{u}{1 - u\sigma}} \right). \quad (55a, b)$$

(55b) wurde aus der bekannten Beziehung

$$\frac{d}{d\xi} J_0(\xi) = -J_1(\xi)^{10}$$

gewonnen. Die Anpassung an die Randbedingung (51b) für  $\rho = 1$  [die Randbedingung (51c) für  $\rho = 0$  ist nach (55b) ohnehin erfüllt, da  $J_1(0) = 0$  ist] ergibt die Frequenzgleichung:

$$\kappa_a J_0 \left( \sqrt{\frac{u}{1 - u\sigma}} \right) - \sqrt{u(1 - u\sigma)} J_1 \left( \sqrt{\frac{u}{1 - u\sigma}} \right) - u \alpha_a = 0. \quad (56)$$

<sup>8a</sup> L. Collatz, a. a. O. S. 58.

<sup>9</sup> Man vgl. etwa P. Schafheitlin: Die Theorie der Besselschen Funktionen, S. 7, Gl. (1). 1908.

<sup>10</sup> P. Schafheitlin: a. a. O., S. 16, Gl. (1a).

Für nicht beachtete Rotationsträgheit folgt aus (56) mit  $\sigma = 0$

$$\kappa_a J_0(\sqrt{u}) - \sqrt{u} J_1(\sqrt{u}) - u \alpha_a = 0. \quad (56a)$$

Vernachlässigt man auch die Masse des Spannrings, so folgt aus (56a) mit  $\alpha_a = 0$

$$\kappa_a J_0(\sqrt{u}) - \sqrt{u} J_1(\sqrt{u}) = 0. \quad (56b)$$

Ist der Spannring fest gelagert, so folgt aus (56) mit  $\kappa_a \rightarrow \infty$ :

$$J_0\left(\sqrt{\frac{u}{1-u\sigma}}\right) = 0 \quad (56c)$$

und für nicht beachtete Rotationsträgheit aus (56c) mit  $\sigma = 0$  die schon seit langem bekannte Frequenzgleichung<sup>11</sup>

$$J_0(\sqrt{u}) = 0, \quad (56d)$$

die natürlich auch aus (56a) oder (56b) für  $\kappa_a \rightarrow \infty$  hergeleitet werden kann. Die Eigenwerte  $u$  in (56b) bilden eine unendliche Folge und man erkennt, daß sich dieselben für höhere Oberschwingungen den Nullstellen der Funktion  $J_1(\sqrt{u})$  nähern. Ist aber  $\alpha_a \neq 0$ , so liefert (56a) eine endliche Folge von Eigenwerten in Übereinstimmung mit (50a), die um so eher abbricht, je größer  $\alpha_a$  und je kleiner  $\kappa_a$  ist, wie die Tab. 1 zeigt, in der die Frequenzgleichungen (56a, b) für die angegebenen Zahlenwerte von  $\alpha_a$  und  $\kappa_a$  ausgewertet worden sind.

Tabelle 1. Die nach den angegebenen strengen Frequenzgleichungen für die mitgeteilten Zahlenwerte von  $\alpha_a$  und  $\kappa_a$  berechneten Eigenwerte  $u_i$

$\alpha_a$	$\kappa_a$	Gl. Nr.	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$
0	10	(56b)	4.752	25.200	63.310	119.603	194.826	289.336
	100	(56a)	2.928	—	—	—	—	—
1	100	(56a)	5.214	—	—	—	—	—
	1000	(56a)	5.720	31.446	70.345	157.613	190.838	—

Für  $\alpha_a = 1$  und  $\kappa_a = 10$  bzw. 100 existiert somit nur je ein reeller und positiver Eigenwert, für  $\alpha_a = 1$  und  $\kappa_a = 1000$ , ein Fall, der sich den praktischen Gegebenheiten sehr nähert, existieren 5 reelle und positive Eigenwerte. Die zugehörige Schranke  $u' \leq 1000$  nach (50a) liegt also sehr hoch und ist also, sofern ihr überhaupt Bedeutung zukommt, entsprechend ungenau.

Um die in Tabelle 1 enthaltenen Zahlenwerte zu kontrollieren und zugleich einfache Formeln zur Verfügung zu stellen, die wieder für kompliziertere Fälle zur Kontrolle dienen können, seien die beiden ersten Eigenwerte für nicht beachtete Rotationsträgheit und vernachlässigbare Masse des Fassungsringes im Falle der Membran konstanter Dicke und Dichte nach dem Verfahren von W. Ritz berechnet.

<sup>11</sup> Man vgl. etwa K. W. Wagner, Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen 1947. Dort (S. 395) findet man die Frequenzgl. (460 g):  $J_p\left(\frac{\omega R}{w}\right) = 0$ . Für Schirmschwingungen ist  $p = 0$ , ferner ist in unserer Bezeichnungsweise  $R = r_a$  und  $w = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$ , wo  $\mu$  die Masse der Flächeneinheit, somit  $\mu = m_v = y_v$  ist. Es bleibt also, da  $\omega = k$  ist, die Frequenzgleichung:  $J_0\left(\frac{k r_a}{\sqrt{S}} \sqrt{m_v y_v}\right) = J_0\left(\sqrt{\frac{k^2 m_v y_v r_a^2}{S}}\right) = 0$  oder  $J_0(\sqrt{u}) = 0$ .

Im allgemeinen Falle erhält man nach Einführung dimensionsloser Größen gemäß (33) bis (35) nach einfacher Rechnung für die Amplitudenfunktion  $W(r)$  [man vgl. hiemit die speziellere Gl. (18)]<sup>12</sup>:

$$\delta(L_i - L_a) = \\ = \delta \bar{J} = \delta \left\{ \int_0^1 \left( \frac{d\eta}{d\rho} \right)^2 \rho d\rho + \kappa_a \eta_a^2 - u \left[ \int_0^1 \left( \mu K \rho \eta^2 + \sigma \mu I \rho \left( \frac{d\eta}{d\rho} \right)^2 \right) d\rho + \alpha_a \eta_a^2 \right] \right\} = 0. \quad (57)$$

Setzt man hierin, wie oben gefordert,  $\sigma = \alpha_a = 0$  und  $\mu = K = I = 1$ , so folgt:

$$\delta \bar{J} = \delta \left\{ \int_0^1 \left( \frac{d\eta}{d\rho} \right)^2 \rho d\rho + \kappa_a \eta_a^2 - u \int_0^1 \eta^2 \rho d\rho \right\} = 0. \quad (57a)$$

Die Ansätze (45a, b) vereinfachen sich mit  $\sigma = \alpha_a = 0$  und der Bezeichnung  $\eta_1$  und  $\eta_2$  statt  $v$  und  $w$  zu:

$$\eta_1(\rho) = 2 + \kappa_a(1 - \rho^2) \text{ mit } \eta_{1a} = 2; \quad \eta_2(\rho) = 3 + \kappa_a(1 - \rho^3) \text{ mit } \eta_{2a} = 3. \quad (58a, b)$$

Geht man nun mit der Linearkombination

$$\eta = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 \quad (59)$$

in das Integral  $\bar{J}$  von (57a) ein, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \bar{J} &= (F_A - u A) \alpha_1^2 + 2(F_B - u B) \alpha_1 \alpha_2 + (F_C - u C) \alpha_2^2, \text{ worin} \\ F_A &= 4\kappa_a + \kappa_a^2; \quad F_B = 6\kappa_a + \frac{6}{5}\kappa_a^2; \quad F_C = 9\kappa_a + \frac{3}{2}\kappa_a^2; \\ A &= \frac{1}{6}(12 + 6\kappa_a + \kappa_a^2); \quad B = \frac{1}{140}(420 + 189\kappa_a + 27\kappa_a^2); \\ C &= \frac{1}{40}(180 + 72\kappa_a + 9\kappa_a^2). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Hiermit ist das Variationsproblem auf ein gewöhnliches Max.-Min.-Problem zurückgeführt und die Erfüllung der notwendigen Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial \alpha_1} = 0; \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (61)$$

ergibt nach (60) zwei hinsichtlich  $\alpha_1, \alpha_2$  lineare und homogene Gleichungen, deren verschwindende Systemdeterminante für  $u$  die quadratische Frequenzgleichung:

$$(AC - B^2) u^2 - (AF_C - 2BF_B + CF_A) u + (F_A F_C - F_B^2) = 0 \quad (62)$$

liefert, die für die beiden ersten Eigenwerte  $u_1, u_2$  obere Schranken ergibt. In der Tabelle 2 sind die beiden Wurzeln von (62) so bezeichnet.

Aber man kann auch unabhängig von (62) sehr scharfe Näherungen an die beiden

<sup>12</sup> Die Arbeit  $L_a$  der Trägheitskräfte ist nach Abb. 1 wohl negativ, da  $T_r$  der Auslenkung  $w$  und  $dM_r$  der Winkelbeschleunigung  $\ddot{w}'$  entgegengesetzt gerichtet ist. Da aber nach (10)  $\ddot{T} = -k^2 T$  ist, verbleibt schließlich für  $L_a$  der positiv genommene Term mit  $u$  in (57).



ersten Eigenwerte ermitteln. Zunächst erhält man drei gröbere Näherungen  $u_A$ ,  $u_B$ ,  $u_C$  durch Nullsetzen der Linearausdrücke in (60):

$$u_A = \frac{F_A}{A}; \quad u_B = \frac{F_B}{B}; \quad u_C = \frac{F_C}{C}. \quad (63a-c)$$

Hierin stellen  $u_A$  und  $u_C$  obere Schranken an den ersten Eigenwert dar, wie es dem Ritzschen Verfahren entspricht, während  $u_B$  sowohl über als auch unter demselben liegen kann. Aus (63a bis c) kann man nun auf konstruktivem Wege<sup>13</sup> oder auf rechnerischem Wege mittels der Formel<sup>14</sup>:

$$\bar{u}_1 = -\frac{u_A u_C - u_B^2}{u_A + u_B - 2 u_C} \quad (64)$$

die sehr scharfe Näherung  $\bar{u}_1$  erhalten, die gewöhnlich besser ist als  $u_1$  nach (62). Ebenso erhält man eine sehr gute Näherung  $\bar{u}_2$  an den zweiten Eigenwert mittels der Formel<sup>15</sup>:

$$\bar{u}_2 = \frac{A^2 F_C - 2 A B F_B + B^2 F_A}{A (A C - B^2)}, \quad (65)$$

die die Auswertung der quadratischen Gl. (62) erspart. In der untenstehenden Tabelle 2 sind die Ergebnisse nach (62) bis (65) für den angegebenen Wert von  $\alpha_a$  samt den bezüglichen Gleichungsnummern eingetragen.

Tabelle 2. Die nach den angegebenen Gleichungen näherungsweise nach W. Ritz berechneten beiden ersten Eigenwerte der Schirmschwingungen der elastisch befestigten Kreismembran

$\alpha_a$	$\frac{F_A}{F_B} \text{ (60)}$	$\frac{A}{B} \text{ (60)}$	$\frac{u_A}{u_B} \text{ (63)}$	$\frac{A C - B^2}{F_A F_C - F_B^2} \text{ (62)}$	$\bar{u}_1 \text{ (64)}$	$u_1 \text{ (62)}$
$\alpha_a$	$\frac{F_C}{F_B}$	$\frac{C}{B}$	$\frac{u_C}{u_B}$		$\bar{u}_2 \text{ (65)}$	$u_2$
0	140	28.6	4.884	9.382653		
	180	35.785714	5.030	297.142858	4.748	4.752
10	240	45	5.333	1200	26.786	26.918

Die Übereinstimmung mit den Werten  $u_1$  und  $u_2$  der 1. Zeile der Tabelle 1 ist sehr gut.

Für die Fälle  $\alpha_a \neq 0$ ,  $\sigma \neq 0$ , bei denen also der Eigenwert in den Randbedingungen auftritt, sollen späterhin Näherungsverfahren angegeben werden, die auch die Integrodifferentialgleichung des Problems ausnützen<sup>16</sup>.

<sup>13</sup> Man vgl. hierzu das Buch des Verf.: Die kritischen Drehzahlen wichtiger Rotorformen, 1935, 4. Abschnitt, S. 20—26, insbesondere auch die Abb. 9 und 10 auf S. 22 und 23.

<sup>14</sup> A. a. O., Anm. 13, dortselbst Gl. (45), S. 22. Dort ist durch Gl. (46), S. 24 auch gezeigt, daß stets  $u_1 > \bar{u}_1$  ist.

<sup>15</sup> A. a. O., Anm. 13, ist unter Gl. (46a), S. 24, eine weitere Näherungsformel für den zweiten Eigenwert angegeben. Vorstehende Formel (65) ist in der in Fußnote 2 erwähnten Arbeit des Verf. begründet worden und dort unter (53), S. 365 angegeben.

<sup>16</sup> Auch Membranen mit achsensymmetrisch veränderlicher Dichte oder Dicke sollen in späteren Arbeiten untersucht werden.

(Eingegangen am 12. März 1956)

(Aus dem Institut für Hochfrequenztechnik der Technischen Hochschule in Wien)

# Kinetische Energiedichte und kinetischer Leistungsfluß in Elektronenströmungen

Von H. W. König

Mit 2 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Mit Hilfe des kinetischen Leistungsflusses läßt sich der Energieaustausch zwischen einem Elektronenstrahl und seiner Umgebung in einfacher Weise formulieren.

Die Abweichungen zwischen linearer und nichtlinearer Theorie werden am kinetischen Leistungsfluß näher untersucht.

## Einleitung

Elektronenröhren der Mikrowellentechnik arbeiten zum Teil mit einem Elektronenstrahl, der über ein geeignetes Steuerorgan vom Hochfrequenzfeld beeinflusst wird. Von der Steuerstelle geht eine elektronische Geschwindigkeitswelle aus, die sich entlang des Strahles in eine Raumladungswelle umwandelt, so daß an einer entfernteren Stelle dem Strahl eine verstärkte Hochfrequenzleistung entzogen werden kann. Der hochfrequente Leistungsgewinn hat sein Äquivalent in einer entsprechenden Abnahme der mittleren kinetischen Energie, mit der die Elektronen auf die Anode treffen.

Im allgemeinen sind die Energieverhältnisse im Inneren des Strahles recht verwickelt und — wie Verfasser gezeigt hat<sup>1</sup> — lokal so verschieden, daß in gewissen Zonen Feldenergie aus der kinetischen Energie entsteht (Verstärkerzone), in anderen Bereichen dagegen Feldenergie in kinetische Energie übergeht und aufgebraucht wird. Es ist daher zweckmäßig, die lokalen Energieverhältnisse in der Elektronenströmung näher zu untersuchen.

Der Umwandlungsprozeß von Feldenergie in kinetische Energie und umgekehrt wird durch die bekannte Energiebeziehung

$$\operatorname{div} \mathfrak{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\mathfrak{J}\mathfrak{E} \quad (1)$$

geregelt. Die linke Seite der Gleichung enthält die charakteristischen Größen des elektromagnetischen Feldes, den Leistungsfluß  $\mathfrak{S}$  (Poyntingscher Vektor) und die Energiedichte  $w$ . Die rechte Seite gibt an, ob an der betrachteten Stelle Feldenergie entsteht oder verschwindet. Werden die Elektronen gebremst, dann hat das skalare Produkt  $-\mathfrak{J}\mathfrak{E}$ , aus Stromdichte  $\mathfrak{J}$  und elektrischer Feldstärke  $\mathfrak{E}$  gebildet, einen positiven Wert, es entsteht also Feldenergie aus kinetischer Energie. Werden die Elektronen hingegen beschleunigt, dann ist  $-\mathfrak{J}\mathfrak{E}$  negativ, Feldenergie verschwindet und kinetische Energie entsteht.

## I. Energiebilanz

Louisell und Pierce<sup>2</sup> haben für eindimensionale Elektronenströmungen (Elektronenstrahlen) gezeigt, daß man durch Einführung zweier mechanischer Begriffe, der kinetischen Energiedichte (kinetic energy) und des kinetischen Leistungsflusses (kinetic power flow), der rechten Seite der Gleichung eine zur linken Seite symmetrische Gestalt geben kann.

Bauer<sup>3</sup> hat diese Formulierung kürzlich erweitert und auf drei Dimensionen ausgedehnt. Bei dem im folgenden wiedergegebenen Gedankengang werden

<sup>1</sup> H. W. König: Selbsterregung von Triodenschaltungen im Ultrakurzwellengebiet. Wiss. Veröff. aus den Siemens-Werken 20, 10—27 (1941).

<sup>2</sup> W. H. Louisell and J. R. Pierce: Power Flow in Electron Beam Devices. Proc. I. R. E. 43, 425—427 (1955).

<sup>3</sup> Nach einem im Rahmen der Fachtagung „Mikrowellenröhren“ am 18. November 1955 in Darmstadt gehaltenen Vortrag.

Elektronengeschwindigkeiten  $|u| \ll c$  vorausgesetzt, so daß die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse  $m$  vernachlässigt werden kann. Aus der kinetischen Energie eines Elektrons  $\frac{m}{2} \cdot u^2$  erhält man die in der Volumeneinheit enthaltene kinetische Energie durch Multiplikation mit der Elektronenzahl ( $-e/e$ ). Man wird daher sinn gemäß die Größe

$$w_k = -\frac{m}{2e} \cdot e \cdot u^2 > 0 \quad (2)$$

als kinetische Energiedichte bezeichnen. Den kinetischen Leistungsfluß definieren wir durch

$$\mathfrak{S}_k = w_k \cdot u = -\frac{m}{2e} (e u) \cdot u^2. \quad (3)$$

Mit dem Konvektionsstrom

$$\mathfrak{J} = e u \quad (4)$$

findet man auch

$$\mathfrak{S}_k = -\frac{m}{2e} \cdot \mathfrak{J} \cdot u^2. \quad (5)$$

Aus dem Lorentzschen Kraftansatz

$$m \cdot \frac{du}{dt} = -e \{ \mathfrak{E} + \mu_0 (u \times \mathfrak{H}) \}$$

ergibt sich durch skalare Multiplikation mit (4)

$$m \cdot e u \cdot \frac{du}{dt} = -e \mathfrak{J} \mathfrak{E}. \quad (6)$$

Mit

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } u^2 - (u \times \text{rot } u)$$

bekommt man

$$e u \cdot \frac{du}{dt} = e u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{e u}{2} \text{grad } u^2 = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{J} \cdot \text{grad } u^2$$

oder

$$e u \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (e u^2) - \frac{1}{2} u^2 \cdot \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathfrak{J} \cdot \text{grad } u^2.$$

Ersetzt man  $\frac{\partial e}{\partial t}$  gemäß der Kontinuitätsgleichung durch  $(-\text{div } \mathfrak{J})$ , so wird

$$e u \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (e u^2) + \frac{1}{2} \{ u^2 \text{div } \mathfrak{J} + \mathfrak{J} \text{grad } u^2 \} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (e u^2) + \frac{1}{2} \text{div } (\mathfrak{J} u^2).$$

Mit den Gl. (6), (2) und (5) erhält man also

$$\mathfrak{J} \mathfrak{E} = \text{div } \mathfrak{S}_k + \frac{\partial w_k}{\partial t},$$

womit Gl. (1) übergeht in

$$\text{div } (\mathfrak{S} + \mathfrak{S}_k) + \frac{\partial}{\partial t} (w + w_k) = 0. \quad (7)$$

Eine besondere Vereinfachung dieser Energiebeziehung erhält man bei periodischen Vorgängen, wenn man zu den durch einen Querstrich gekennzeichneten zeitlichen Mittelwerten übergeht. Es ergibt sich

$$\text{div } (\bar{\mathfrak{S}} + \bar{\mathfrak{S}}_k) = 0. \quad (8)$$

Durch Integration über eine geschlossene Fläche findet man für die in dem eingeschlossenen Volumen produzierte Wechselstromleistung

$$P = \oint \bar{\mathfrak{S}} d\mathfrak{f} = - \oint \bar{\mathfrak{S}}_k d\mathfrak{f}. \quad (9)$$

Der Vorteil dieser Darstellung wird deutlich, wenn man — wie in vielen Fällen — eindimensionale Elektronenströmungen untersucht. Hat der Elektronenstrahl



den Querschnitt  $F$  und tritt er an der Stelle  $z = 0$  in die Hüllfläche ein und bei  $z = a$  wieder aus (Abb. 1), so bekommt man für Gl. (9)

$$P = \oint \bar{\mathcal{E}} d\mathbf{f} = F [\bar{S}_k(0) - \bar{S}_k(a)]. \quad (10)$$

Der Elektronenstrahl kann mit dem Außenraum durch beliebige Elemente hochfrequenzmäßig gekoppelt sein. In Abb. 1 ist beispielsweise der Strahl mit einer wendelförmigen Leitung umgeben (Wanderfeldröhre), welche das Kopplungselement zum Außenraum darstellt. Der elektromagnetische Leistungsfluß  $\bar{\mathcal{E}}$  hat bei

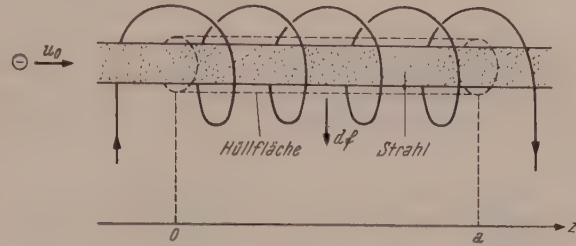


Abb. 1. Zur Energiebilanz

Kopplung des Strahles mit dem Außenraum nicht nur eine axiale Komponente, sondern vor allem transversale Komponenten. Über Gl. (10) wird die Berechnung von  $P$  ohne die meist umständlichere Ermittlung der transversalen Komponenten des Poynting'schen Vektors ermöglicht.

## II. Lineare und quadratische Theorie der eindimensionalen Strömung<sup>4</sup>

Wegen des nichtlinearen Charakters der Differentialgleichungen bereitet auch das eindimensionale Strömungsproblem erhebliche Schwierigkeiten. Es ist daher üblich, die durch die Wechselstromerregung mit der Frequenz  $\omega$  hervorgerufenen Abweichungen vom stationären Zustand (Index 0) durch einen Störungsansatz zu berücksichtigen. Wir machen für die Elektronengeschwindigkeit und für den Konvektionsstrom einen quadratischen Ansatz

$$u = u_0 + u_1 + u_2, \quad (11)$$

$$J = J_0 + J_1 + J_2. \quad (12)$$

Infolge Erregung des Systems mit der Frequenz  $\omega$  sind  $u_1$  und  $J_1$  lineare Funktionen von  $\sin(\omega t + \varphi)$ , also ist  $\bar{u}_1 = 0$  und  $\bar{J}_1 = 0$ . Die Größen  $u_2$  und  $J_2$  hingegen sind quadratische Funktionen von  $\sin(\omega t + \varphi)$ , sie ergeben die Oberschwingungen von der Frequenz  $2\omega$  und im allgemeinen einen zeitlich konstanten Anteil. Zur Bestimmung von  $S_k$  hat man nach (5) den Ausdruck  $J \cdot u^2$  zu bilden, der bis zu Gliedern zweiter Ordnung folgende Anteile enthält:

$$J_0 u_0^2 + u_0^2 J_1 + u_0^2 J_2 + J_0 u_1^2 + 2 u_0 J_0 u_1 + 2 u_0 J_0 u_2 + 2 u_0 J_1 u_1.$$

Durch Mittelwertbildung und Weglassung des hier nicht interessierenden stationären Gliedes  $J_0 u_0^2$  ergibt sich

$$\overline{J u^2} = 2 u_0 \overline{J_1 u_1} + J_0 \overline{u_1^2} + 2 u_0 J_0 \overline{u_2} + u_0^2 \overline{J_2}. \quad (13)$$

In der linearen Theorie mit  $u_2 = 0$  und  $J_2 = 0$  bleiben nur zwei Störungsglieder bestehen

$$\overline{J u^2} = 2 u_0 \overline{J_1 u_1} + J_0 \overline{u_1^2}. \quad (14)$$

In diesem Fall bekommt man aus (5)

$$\bar{S}_k = -\frac{m}{e} u_0 \cdot \overline{J_1 u_1} - \frac{m}{2e} J_0 \cdot \overline{u_1^2}. \quad (15)$$

<sup>4</sup> Nach einem Vortrag des Verfassers anlässlich der Darmstädter NTG-Tagung vom 18. November 1955.

Für die durch eine elektrische Doppelschicht erregte freie Raumladungswelle sind die Strömungsverhältnisse der Energie in Abb. 2 dargestellt. Da hierbei bekanntlich der erste Term unabhängig von  $z$  verschwindet, bleibt ein Energiestrom

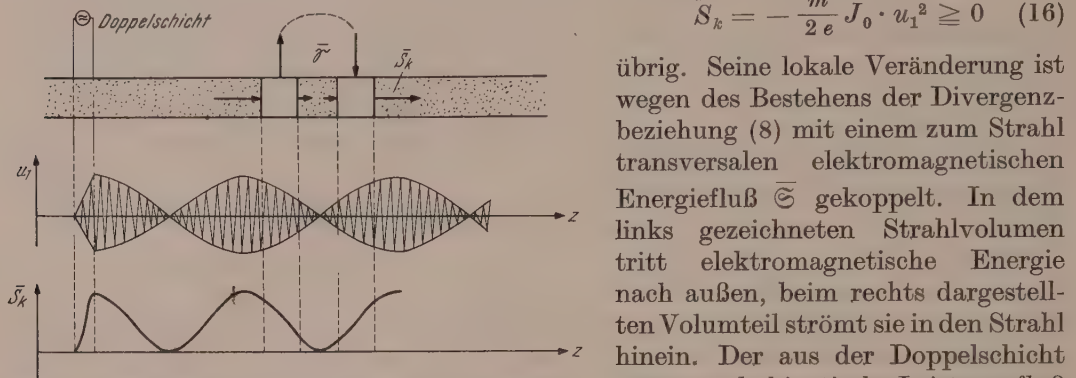


Abb. 2. Energieströmung der freien Raumladungswelle nach der  $u$ -linearen Theorie

$$\bar{S}_k = -\frac{m}{2e} J_0 \cdot \overline{u_1^2} \geq 0 \quad (16)$$

übrig. Seine lokale Veränderung ist wegen des Bestehens der Divergenzbeziehung (8) mit einem zum Strahl transversalen elektromagnetischen Energiefluß  $\bar{S}$  gekoppelt. In dem links gezeichneten Strahlvolumen tritt elektromagnetische Energie nach außen, beim rechts dargestellten Volumenteil strömt sie in den Strahl hinein. Der aus der Doppelschicht austretende kinetische Leistungsfluß muß von dem Steuergenerator aufgebracht werden. Nach der linearen

Theorie erfolgt also der Steuervorgang mittels Doppelschicht nicht leistungslos.

Im allgemeinen wird jedoch eine andere lineare Theorie<sup>2</sup> benutzt bei, der nämlich an Stelle des linearen Störungsgliedes von  $u$  das lineare Störungsglied von  $u^2$  herangezogen wird. An Stelle von (11) mit  $u_2 = 0$  tritt

$$u^2 = u_0^2 + 2 u_0 u_1. \quad (11a)$$

Dieser Ansatz entspricht der Berücksichtigung des linearen Störungsgliedes der Spannung an Stelle des linearen Störungsgliedes der Geschwindigkeit. Auf dieser Basis ergibt sich für (15)

$$\bar{S}_k = -\frac{m}{e} u_0 \cdot \bar{J}_1 u_1. \quad (15a)$$

Für die freie Raumladungswelle wird also

$$\bar{S}_k = 0,$$

das heißt, die Doppelschicht arbeitet leistungslos.

Man kommt also in der linearen Betrachtungsweise zu verschiedenen Ergebnissen, je nachdem, welche lineare Theorie Anwendung findet. Die „ $u^2$ -lineare Theorie“ berücksichtigt nur das erste Glied von Gl. (13), die „ $u$ -lineare Theorie“ enthält bereits zwei Terme und erst die quadratische Theorie mit vier Gliedern kann die erste verlässliche Näherung für die Berechnung der Leistungsbilanz liefern. Beschränkt man sich hierbei auf Anordnungen, bei denen der Mittelwert des Stromes  $J$  durch den Steuervorgang nicht beeinflussbar ist, dann folgt aus Gl. (12) wegen  $\bar{J} = J_0$  unmittelbar  $\bar{J}_2 = 0$ . Diese Verhältnisse hat man in allen Fällen, in denen die Elektronen erst nach dem Verlassen der Kathode dem Steuervorgang unterworfen werden (Elektronenkanone). Man hat diesen Fall auch bei der Raumladungsdioden, wenn sie im Leerlaufzustand betrieben wird, jedoch nicht im Kurzschlußzustand. Im Kurzschlußfall liefert das Glied  $u_0^2 \bar{J}_2$  einen erheblichen Beitrag zur Richtleistung und  $\bar{J}_2$  gibt gerade den Kurzschlußrichtstrom an. Den Richteffect an Raumladungsdioden hat Beck<sup>5</sup> eingehend untersucht. Betrachtet man den Fall  $\bar{J}_2 = 0$ , dann enthält auch die quadratische Theorie nach Gl. (13) nur noch drei Terme

$$\overline{J u^2} = 2 u_0 \bar{J}_1 u_1 + \bar{J}_0 u_1^2 + 2 u_0 J_0 \bar{u}_2. \quad (17)$$

<sup>5</sup> K. H. Beck: Diodengleichrichtung bei Zentimeter-Wellen. Österr. Ingenieur-Arch. 5, 12–33 (1951).

Im speziellen zeigt die Rechnung für die in Abb. 2 dargestellte Steuerstrecke (im Grenzfall des Plattenabstandes Null als Doppelschicht bezeichnet), daß  $\bar{u}_2 < 0$  ist und damit die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{u} = u_0 + \bar{u}_2$$

durch den Steuervorgang herabgesetzt wird. Nach der quadratischen Theorie wird also das in der „ $u$ -linearen Theorie“ erscheinende zweite Glied von Gl. (17) wieder teilweise kompensiert. Im Grenzfall der Doppelschicht wird die Kompensation vollständig und man kommt so auf die einfache „ $u^2$ -lineare Theorie“ zurück. In allen anderen Fällen jedoch übertrifft in Gl. (17) das zweite Glied das dritte. Das hat zur Folge, daß die Verluste der Raumladungsdioden immer größer sind als nach der „ $u^2$ -linearen Theorie“, aber kleiner als die „ $u$ -lineare Theorie“ ergibt.

Ähnliche Untersuchungen, die sich auf die Abweichungen zwischen linearer und nichtlinearer Theorie beziehen, hat Walker<sup>6</sup> angestellt.

Herrn Dr. H. Bauer, Telefunken G. m. b. H., Ulm, dankt der Verfasser für die Überlassung seiner noch nicht veröffentlichten Ergebnisse.

<sup>6</sup> L. R. Walker: Power Flow in Electron Beams. J. Appl. Physics **26**, 1031—1033 (1955).

(Eingegangen am 7. März 1956)

## Über die Gleit- und Sturzbewegung eines Flugzeuges bei großer statischer Stabilität

Von W. Müller, München

Mit 6 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** In der Arbeit wird die Gleit- und Sturzbewegung eines Flugzeuges bei konstantem Anstellwinkel betrachtet, wie sie angenähert bei großer statischer Stabilität vorkommt. Ausgehend von dem stationären Gleitzustand werden insbesondere die kleinen überlagerten Störungen der Geschwindigkeit und des Bahnneigungswinkels, vor allem die Auswirkung dieser Störungen auf die Bahnkurve des Schwerpunktes, untersucht. Liegt der Gleitwinkel unterhalb eines gewissen Grenzwertes, so erhält man eine wellenartige Bahn, die mit der Zeit infolge der Dämpfung wieder in eine gerade Gleitbahn übergeht, während bei großem Gleitwinkel (dem Sturzflug entsprechend) die Bahn sich asymptotisch der Geraden annähert. Für die Gleitbewegung wird auch noch der aus der Momentengleichung ableitbare notwendige Höhenruderausschlag berechnet, der, ähnlich wie die Gleitwelle, nach Art einer gedämpften harmonischen Schwingung sich ändert.

### I. Einleitung

Unter der dynamischen Stabilität eines Flugzeuges versteht man bekanntlich die Eigenschaft, daß kleine Störungen einer stationären Gleichgewichtslage infolge der im System selbst enthaltenen Kräfte, einschließlich der Trägheitskräfte, von selbst eine Rückbildung erfahren, derart, daß die Wiederherstellung der dem Gleichgewicht entsprechenden Größen entweder auf dem Wege einer gedämpften, also abklingenden Schwingung um die Gleichgewichtslage oder in Form einer aperiodischen asymptotischen Annäherung an diese Lage erfolgt.

### II. Die Gleitschwingung

Zur Veranschaulichung der Methode der Stabilitätsuntersuchung wollen wir den Fall der Gleitbewegung bei konstantem Anstellwinkel betrachten, der angenähert bei großer statischer Stabilität zustande kommt<sup>1</sup>. Bei der unbeschleunigten stationären

<sup>1</sup> Ich verweise hier auf die demnächst erscheinende 4. Auflage meiner „Einführung in die Mechanik des Fluges“ (Fachbuchverlag Leipzig).



Bewegung, die durch das Gleichgewicht der Kräfte gekennzeichnet ist, beschreibt der Schwerpunkt eine gerade Linie, die gegen die Horizontale unter einem Winkel  $\gamma_0$  geneigt ist, der durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{c_w}{c_a} \quad (1)$$

bestimmt ist, wo  $c_a$  und  $c_w$  die dimensionslosen Beiwerte des Auftriebes und des Widerstandes bedeuten. Für den Kräfteausgleich haben wir die Beziehungen

$$c_w \frac{1}{2} \rho v_e^2 F = G \sin \gamma_0; \quad c_a \frac{1}{2} \rho v_e^2 F = G \cos \gamma_0 \quad (2)$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$k_w v_e^2 = g \sin \gamma_0; \quad k_a v_e^2 = g \cos \gamma_0. \quad (2a)$$

Für die beschleunigte, also gestörte Bewegung wird, wenn die vertikale Richtung nach unten als positiv angesehen wird,

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= g \sin \gamma - k_w v^2, \\ v \dot{\gamma} &= g \cos \gamma - k_a v^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Setzen wir nun  $v = v_e + u$ ,  $\gamma = \gamma_0 + \delta$  und behandeln die Abweichungen von dem stationären Zustand, das heißt  $u$  und  $\delta$  als kleine Größen, so haben wir bei Vernachlässigung der Glieder, die von zweiter Ordnung klein sind,

$$\sin \gamma = \sin(\gamma_0 + \delta) = \sin \gamma_0 + \delta \cos \gamma_0; \quad \cos \gamma = \cos(\gamma_0 + \delta) = \cos \gamma_0 - \delta \sin \gamma_0, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= \dot{u}, \quad v \dot{\gamma} = (v_e + u) \dot{\delta} \approx v_e \dot{\delta}, \\ v^2 &= (v_e + u)^2 \approx v_e^2 + 2 v_e u. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Benutzt man weiter die Beziehungen (2a), so gehen die Gl. (3) über in

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} - g \delta \cos \gamma_0 + 2 k_w v_e u &= 0, \\ v_e \dot{\delta} + g \delta \sin \gamma_0 + 2 k_a v_e u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Differenziert man jetzt die erste Gleichung nach der Zeit  $t$ , so ergibt sich nach Elimination von  $\delta$  und  $\ddot{\delta}$  und Benutzung von (2a) für  $u$  die Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{u} + \frac{3 g \sin \gamma_0}{v_e} \dot{u} + \frac{2 g^2}{v_e^2} u = 0 \quad (7)$$

von der Form

$$\ddot{u} + 2 b \dot{u} + a^2 u = 0,$$

der übrigens auch die Größe  $\delta$  genügt. Das ist eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung etwa durch den Ansatz

$$u = u_0 e^{-b t} \cos(\omega t - \varphi) \quad (8)$$

dargestellt werden kann, wenn  $\sqrt{a^2 - b^2} = \omega$  gesetzt wird.

Nun ist aber in dem vorausgesetzten Fall der Gleitbewegung  $b > 0$ . Es folgt also, daß sich für  $a > b$  die Größen  $u$  und  $\delta$  wie die Amplituden einer gedämpften, also mit der Zeit abklingenden Schwingung verhalten. Setzt man für  $a$  und  $b$  die Werte nach (7) ein, so erhält man für die Frequenz und die Periode  $T$  die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{g}{2 v_e} \sqrt{8 - 9 \sin^2 \gamma_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_a g (9 \cos^2 \gamma_0 - 1)}{\cos \gamma_0}}; \\ T &= \frac{2 \pi}{\omega} = 4 \pi \sqrt{\frac{\cos \gamma_0}{k_a g (9 \cos^2 \gamma_0 - 1)}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Man erkennt daher, daß eine eigentliche Schwingung für  $\cos \gamma_0 > \frac{1}{3}$ , also für Gleitwinkel  $\gamma_0 < 70 \frac{1}{2}^\circ$  entsteht. Wir wollen diese Bewegung als Gleitbewegung im engeren Sinne, die Bewegung mit  $\gamma_0 > 70 \frac{1}{2}^\circ$  als Sturzbewegung bezeichnen. Da die mittlere Geschwindigkeit  $v_e$  ist, haben wir als Grenzwert für die Wellenlänge der Gleitbahn den Wert

$$L = v_e T = \frac{4 \pi v_e^2}{g \sqrt{9 \cos^2 \gamma_0 - 1}} = \frac{4 \pi \cos \gamma_0}{k_a \sqrt{9 \cos^2 \gamma_0 - 1}}. \quad (10)$$

Die Größe  $\delta$  hat im wesentlichen dieselbe Form wie die zusätzliche Geschwindigkeit  $u$ , das heißt die entsprechende Schwingung hat die gleiche Frequenz und die gleiche Dämpfung. Aus der ersten Gl. (6) ergibt sich mit (2a)

$$\delta = \frac{\dot{u} + 2 k_w v_e u}{g \cos \gamma_0} = \frac{\dot{u} + \frac{4}{3} b u}{g \cos \gamma_0}. \quad (11)$$

Setzt man den Wert (8) für  $u$  mit  $\psi = 0$  ein, so findet man

$$\delta = \frac{u_0}{g \cos \gamma_0} e^{-bt} \left( \frac{1}{3} b \cos \omega t - \omega \sin \omega t \right). \quad (11a)$$

Daraus folgt dann weiter

$$\left. \begin{aligned} \dot{\delta} &= \frac{u_0 e^{-bt}}{g \cos \gamma_0} \left[ \frac{2}{3} b \omega \sin \omega t - \left( \frac{1}{3} b^2 + \omega^2 \right) \cos \omega t \right], \\ \ddot{\delta} &= \frac{u_0 e^{-bt}}{g \cos \gamma_0} \left[ \omega \left( \omega^2 - \frac{1}{3} b^2 \right) \sin \omega t + b \left( \frac{5}{3} \omega^2 + \frac{1}{3} b^2 \right) \cos \omega t \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

### III. Bestimmung der Gleitwelle

Wir können nun auch die wellenartige Gleitbahn des Schwerpunktes berechnen. Wenn die  $x$ -Achse horizontal und die  $y$ -Achse vertikal abwärts gerichtet ist, so wird

$$\left. \begin{aligned} dx &= (v_e + u) \cos \gamma dt = (v_e + u) (\cos \gamma_0 - \delta \sin \gamma_0) dt, \\ dy &= (v_e + u) \sin \gamma dt = (v_e + u) (\sin \gamma_0 + \delta \cos \gamma_0) dt. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Drehen wir das Achsensystem um den Winkel  $\gamma_0$ , so daß die neue  $x$ -Achse in die Gleitlinie des stationären ungestörten Fluges fällt, so erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \gamma_0 + y \sin \gamma_0, \\ y' &= y \cos \gamma_0 - x \sin \gamma_0 \end{aligned}$$

nach Einsetzung der Ausdrücke für  $u$  und  $\delta$  und Vernachlässigung der kleinen Glieder zweiter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} dx' &= (v_e + u_0 e^{-bt} \cos \omega t) dt, \\ dy' &= (v_e + u) \delta dt \approx \frac{v_e u_0}{g \cos \gamma_0} e^{-bt} \left( \frac{1}{3} b \cos \omega t - \omega \sin \omega t \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Benutzt man die bekannten Integralformeln

$$\begin{aligned} \int e^{-bt} \cos \omega t dt &= \frac{e^{-bt}}{b^2 + \omega^2} [\omega \sin \omega t - b \cos \omega t], \\ \int e^{-bt} \sin \omega t dt &= -\frac{e^{-bt}}{b^2 + \omega^2} [\omega \cos \omega t + b \sin \omega t], \end{aligned}$$

so ergeben sich für die Koordinaten folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} x' &= v_e t + \frac{u_0 \omega}{a^2} \left[ e^{-bt} \sin \omega t + \frac{b}{\omega} (1 - e^{-bt} \cos \omega t) \right], \\ y' &= \frac{v_e u_0 \omega^2}{3 a^2 g \cos \gamma_0} \left[ 4 \frac{b}{\omega} e^{-bt} \sin \omega t - \left( 3 - \frac{b^2}{\omega^2} \right) (1 - e^{-bt} \cos \omega t) \right], \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

oder bei Einführung der dimensionslosen Größen  $\xi = \frac{x' \omega}{v_e}$ ,  $\eta = \frac{y' \omega}{v_e}$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \omega t + \frac{u_0 \omega^2}{v_e a^2} \left[ e^{-bt} \sin \omega t + \frac{b}{\omega} (1 - e^{-bt} \cos \omega t) \right] = \\ &= \omega t + A \left[ e^{-bt} \sin \omega t + \frac{b}{\omega} (1 - e^{-bt} \cos \omega t) \right], \\ \eta &= \frac{u_0 \omega^3}{3 a^2 g \cos \gamma_0} \left[ 4 \frac{b}{\omega} e^{-bt} \sin \omega t - \left( 3 - \frac{b^2}{\omega^2} \right) (1 - e^{-bt} \cos \omega t) \right] = \\ &= B \left[ 4 \frac{b}{\omega} e^{-bt} \sin \omega t - \left( 3 - \frac{b^2}{\omega^2} \right) (1 - e^{-bt} \cos \omega t) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

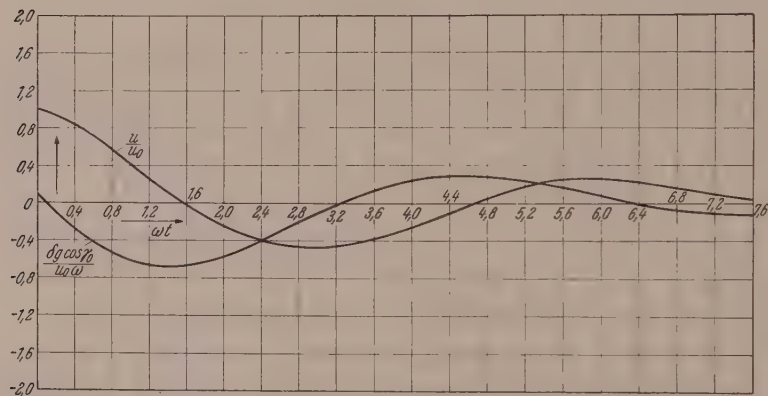


Abb. 1. Darstellung des Verlaufes der Größen  $u$  und  $\delta$  bei der Gleitschwingung

Dabei drücken sich die auftretenden Konstanten in folgender Weise durch Funktionen des Gleitwinkels  $\gamma_0$  aus

$$\omega = \frac{g}{2 v_e} \sqrt{9 \cos^2 \gamma_0 - 1}; \quad \frac{b}{\omega} = \frac{3 \sin \gamma_0}{\sqrt{9 \cos^2 \gamma_0 - 1}}; \quad \frac{a}{\omega} = \frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{9 \cos^2 \gamma_0 - 1}}. \quad (17)$$

Für die in den Ausdrücken für  $\xi$  und  $\eta$  auftretenden Konstanten ergeben sich die Werte

$$A = \frac{u_0}{8 v_e} (9 \cos^2 \gamma_0 - 1); \quad B = \frac{1}{48} \frac{u_0}{v_e} \frac{(9 \cos^2 \gamma_0 - 1)^{\frac{3}{2}}}{\cos \gamma_0}. \quad (18)$$

Wir haben für die zeichnerische Darstellung der Größen  $\frac{u}{u_0}$  und  $\frac{\delta g \cos \gamma_0}{u_0 \omega}$  (Abb. 1) sowie der Gleitwelle (Abb. 2) folgende Grundkonstanten zugrunde gelegt:

$$\frac{b}{\omega} = 0.25; \quad \frac{a}{\omega} = \frac{1}{4} \sqrt{17} = 1.031; \quad \gamma_0 \sim 13^\circ 7'.$$

Daraus berechnet sich dann

$$A = 0.188; \quad B = 0.0875.$$

Aus der Gl. (16) oder der Darstellung der  $\xi$ - $\eta$ -Kurve (Abb. 2) erkennt man, daß der Schwerpunkt infolge der Störung des Gleichgewichtes seine anfängliche Bahn ver-



läßt und auf dem Wege einer verhältnismäßig schnell abklingenden Schwingung in eine neue Bahn übergeht, die nach dem Verschwinden der Welle der ursprünglichen geradlinigen Bahn parallel ist.

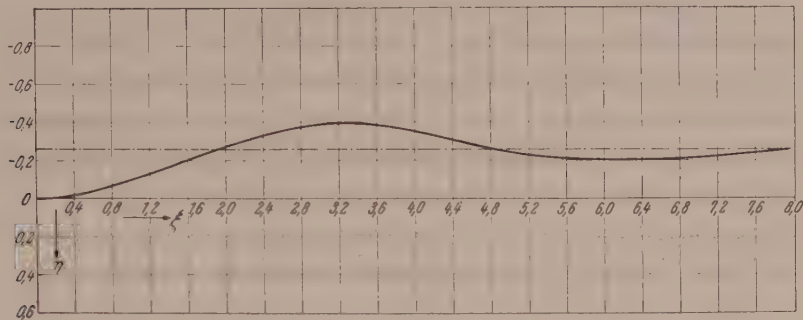


Abb. 2. Gleitwelle bei konstantem Anstellwinkel ( $u_0 = 0.2 v_e$ ;  $b = 0.25 \omega$ ;  $\gamma_0 \sim 13^\circ 7'$ )

#### IV. Berechnung der Steuerung

Zur Berechnung des notwendigen Höhenruderausschlages, der naturgemäß klein ist, benutzen wir die Momentengleichung

$$J \ddot{\vartheta} = M, \quad (19)$$

wenn mit  $\vartheta$  der Winkel zwischen der Flügelsehne und der Waagerechten bezeichnet wird. Dabei ist (Abb. 3)

$$\gamma = \vartheta + \alpha. \quad (20)$$

Nimmt man etwa an, daß die Höhenflosse so getrimmt ist, daß im stationären Horizontalflug ( $\dot{\vartheta} = \ddot{\vartheta} = 0$ ) der Höhenruderausschlag gerade  $\beta_H = 0$  ist, so ergibt sich wegen  $\alpha = \text{konst.}$

$$\dot{\vartheta} = \dot{\gamma} = \dot{\delta}; \quad \ddot{\vartheta} = \ddot{\gamma} = \ddot{\delta}. \quad (21)$$

Dann müssen in der Momentengleichung die Glieder mit  $\dot{\vartheta}$  und  $\ddot{\vartheta}$  gerade auch das von  $\beta_H$  abhängige Glied kompensiert werden. Es bleibt also die Gleichung

$$J \ddot{\gamma} = \frac{G}{g} i^2 \ddot{\gamma} = M_H - M_D, \quad (22)$$

wo  $M_H$  das Moment der Höhenleitwerkskraft und  $M_D$  das Dämpfungsmoment bedeutet. Bezeichnen wir mit  $q$  den Staudruck  $q = \frac{1}{2} \rho v_e^2$ , mit  $F_H$  die Fläche des Höhenleitwerkes und mit  $l$  den Abstand der Leitwerkskraft vom Schwerpunkt, so wird

$$M_H = \frac{\partial c_{nH}}{\partial \beta_H} \beta_H q F_H \cdot l. \quad (23)$$

Das Dämpfungsmoment  $M_D$  rührt her von der Änderung  $\Delta \alpha_H = \frac{l \dot{\gamma}}{v_e}$  des Anstellwinkels infolge Drehung des Flugzeuges. Wir erhalten

$$M_D = \frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H} \frac{\rho}{2} F_H l^2 v_e \dot{\gamma}. \quad (24)$$

Setzt man ferner  $F_H \cdot l = F t_F \lambda$ , wo  $t_F$  die Flügeltiefe bedeutet, ferner  $s = \frac{2}{\rho g} \frac{G}{F}$  und nimmt man schließlich darauf Rücksicht, daß wegen des vom Wirbelband er-

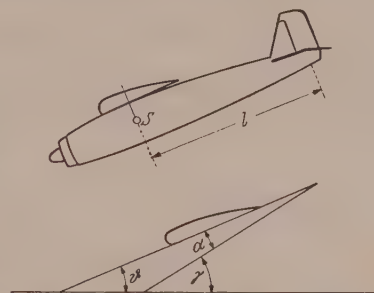


Abb. 3. Winkel beim Gleitflug

zeugten Abwindes der Anstellwinkel am Leitwerk vom Anstellwinkel  $\alpha$  am Flügel verschieden ist, so hat man

$$\frac{\partial c_{nH}}{\partial \beta_H} = -\frac{\partial c_{n\alpha}}{\partial \alpha_H} \cdot \zeta = c_{n'H} \cdot \zeta. \quad (25)$$

Löst man die entstehende Gleichung nach dem Winkel  $\beta_\alpha$  auf, so kommt

$$\zeta \beta_H = \frac{s \cdot i^2}{\lambda c_{n'H} t_F v_e^2} \ddot{\delta} + \frac{l}{v_e} \dot{\delta}. \quad (26)$$

Nach Einsetzung der Ausdrücke für  $\delta$  und  $\ddot{\delta}$  ergibt sich ein Ausdruck von der Form

$$\zeta \beta_H = e^{-bt} (C \sin \omega t - D \cos \omega t). \quad (27)$$

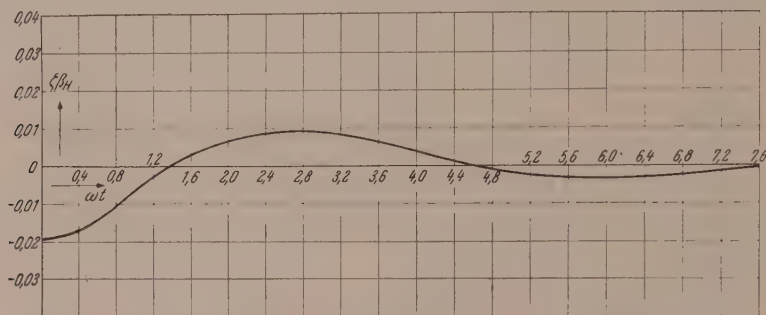


Abb. 4. Höhenruderanschlag beim Gleitflug mit konstantem Anstellwinkel

Wir wollen der Zahlenrechnung das Beispiel eines kleinen langsamen Flugzeuges zugrunde legen, mit den folgenden Konstanten, die teilweise schon oben bei der Berechnung der Gleitwelle benutzt wurden:

$$i = 1.2 \text{ m}; t_F = 1.4 \text{ m}; l = 4 \text{ m}, s = 80 \text{ m}, \lambda = 0.3; v_e = 60 \text{ m/s}, \frac{u_0}{v_e} = 0.2; b = 0.25 \omega.$$

Dann ergeben sich für die Konstanten  $C$  und  $D$  in dem Ausdruck für die Zahlenwerte

$$C = 0.0154; \quad D = 0.0139.$$

Der entsprechende Verlauf der Größe  $\zeta \beta_H$  in Abhängigkeit von  $\omega t$  ist in der Abb. 4 dargestellt.

## V. Der Fall des Sturzfluges

Der Fall  $\cos \gamma_0 < \frac{1}{3}$  kann als eigentlicher Sturzflug bezeichnet werden. Er ist dadurch ausgezeichnet, daß die Rückführung in die stationäre Gleichgewichtslage nicht in Form von Schwingungen, sondern asymptotisch nach Art einer Exponentialfunktion mit negativem, mit der Zeit proportionalem Exponenten erfolgt. Da in diesem Fall  $a < b$ , also  $b^2 - a^2 = \omega'^2$  positiv wird, so gehen die trigonometrischen Funktionen, die in der Lösung auftreten, in hyperbolische Funktionen über.

Setzen wir etwa

$$u = u_0 e^{-bt} \mathfrak{C}_0 \mathfrak{I} \omega' t, \quad (28)$$

so ergibt sich daraus

$$\delta = \frac{u_0 e^{-bt}}{g \cos \gamma_0} \left( \frac{1}{3} b \mathfrak{C}_0 \mathfrak{I} \omega' t + w' \mathfrak{S} \sin \omega' t \right). \quad (29)$$

Die Gleichungen für die dimensionslosen Koordinaten  $\xi = \frac{x' w'}{v_e}$ ;  $\eta = \frac{y' w'}{v_e}$  der auf die Gerade des stationären Fluges (als  $x$ -Achse) bezogenen Schwerpunktsbahn werden dann nach einer mit dem Gleitfall völlig analogen Rechnung

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \omega' t - \frac{u_0 \omega'^2}{v_e a^2} \left[ e^{-bt} \sin \omega' t - \frac{b}{\omega'} (1 - e^{-bt} \cos \omega' t) \right] = \\ &= \omega' t - A' \left[ e^{-bt} \sin \omega' t - \frac{b}{\omega'} (1 - e^{-bt} \cos \omega' t) \right], \\ \eta &= \frac{u_0 \omega'^3}{3 a^2 g \cos \gamma_0} \left[ -4 \frac{b}{\omega'} e^{-bt} \sin \omega' t + \left( 3 + \frac{b^2}{\omega'^2} \right) (1 - e^{-bt} \cos \omega' t) \right] = \\ &= B' \left[ -4 \frac{b}{\omega'} e^{-bt} \sin \omega' t + \left( 3 + \frac{b^2}{\omega'^2} \right) (1 - e^{-bt} \cos \omega' t) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Dabei ist zu setzen

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \frac{g}{2 v_e} \sqrt{1 - 9 \cos^2 \gamma_0}; \quad \frac{b}{\omega'} = \frac{3 \sin \gamma_0}{\sqrt{1 - 9 \cos^2 \gamma_0}}; \quad \frac{a}{\omega'} = \frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{1 - 9 \cos^2 \gamma_0}}; \\ A' &= \frac{u_0}{8 v_e} (1 - 9 \cos^2 \gamma_0); \quad B' = \frac{u_0}{48 v_e} \frac{(1 - 9 \cos^2 \gamma_0)^{\frac{3}{2}}}{\cos \gamma_0}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

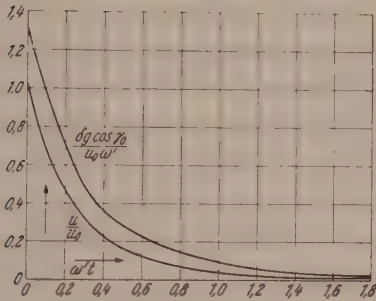


Abb. 5. Verlauf der Zusatzgrößen  $u$  und  $\delta$  beim Sturzflug

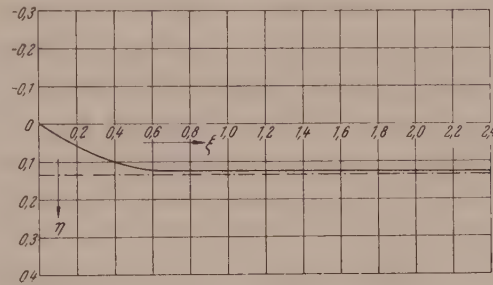


Abb. 6. Schwerpunktbahn beim gestörten Sturzflug  
 $(\gamma_0 = 76.8^\circ, \frac{b}{\omega'} = 4, \frac{u_0}{v_e} = 0.2)$

Wir haben in den Abb. 5 und 6 für das Beispiel  $\gamma_0 = 76.8^\circ$ ,  $\frac{b}{\omega'} = H$ ;  $A' = 0.0133$ ;  $B' = 0.00712$  die charakteristischen Kurven, also  $u$ ,  $\delta$  und die  $\xi$ - $\eta$ -Kurve dargestellt. Man erkennt, daß die Flugbahn nach der Störung asymptotisch in die um ein geringes parallel verschobene neue geradlinige Bahn übergeht.

Bemerkenswert sind nun die beiden, den Sturzflugbereich  $0 < \cos \gamma_0 < \frac{1}{3}$  begrenzenden Sonderfälle, zu denen wir einige Bemerkungen machen wollen.

a) Der Fall  $\cos \gamma_0 = \frac{1}{3}$  ( $a = b$ ) entspricht der Differenzialgleichung

$$\ddot{u} + 2a\dot{u} + a^2 = 0, \quad (32)$$

die bekanntlich die beiden partikulären Integrale

$$u_1 = c_1 e^{-at}; \quad u_2 = c_2 t e^{-at}$$

besitzt. Setzen wir die Gesamtlösung in der Form

$$u = u_0 (1 + at) e^{-at} \quad (33)$$

an, so erhalten wir daraus

$$\delta = \frac{u_0 a}{g} e^{-at} (4 + at). \quad (34)$$

Damit ergeben sich dann nach (14) die folgenden Ausdrücke für die Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= at \left( 1 - \frac{u_0}{v_e} e^{-at} \right) + \frac{2u_0}{v_e} (1 - e^{-at}), \\ \eta &= \frac{u_0}{v_e} \sqrt{2} [at e^{-at} - 5(1 - e^{-at})]. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$



Der Verlauf der  $\xi$   $\eta$ -Kurve ist ganz ähnlich wie in dem allgemeinen Fall des Sturzfluges, weshalb wir auf die zeichnerische Darstellung verzichtet haben.

b) Der Fall des vertikalen Sturzfluges ( $\gamma_0 = 90^\circ$ ) ist in den Formeln (30) nicht enthalten. Man erhält in diesem Falle aus (6) die voneinander unabhängigen Gleichungen

$$\dot{u} + \frac{2g}{v_e} u = 0; \quad \dot{\delta} + \frac{g}{v_e} \delta = 0. \quad (36)$$

Die Lösungen sind

$$u = u_0 e^{-\frac{2g}{v_e} t}; \quad \delta = \delta_0 e^{-\frac{g}{v_e} t}. \quad (37)$$

Daraus ergibt sich dann mit  $\omega' = \frac{g}{2v_e}$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \omega' t + \frac{u_0}{2v_e} (1 - e^{-2\omega' t}), \\ \eta &= \frac{1}{2} \delta_0 (1 - e^{-2\omega' t}). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Die Bestimmung des Verlaufes des erforderlichen Höhenruderausschlages erfolgt nach der im 2. Abschnitt dargelegten Methode.

Die Behandlung einiger weiterer Fälle von Flugzeugbewegungen unter erweiterten Voraussetzungen soll an anderer Stelle durchgeführt werden.

(Eingegangen am 7. März 1956)

## Verschleiß — ein physikalisch-chemisches Problem

Von H. Nowotny, Wien

Mit 8 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Es werden zwei charakteristische Verschleißarten (gleitende Trockenreibung und Kavitation) vom Standpunkt der sich abspielenden Teilvorgänge betrachtet. Ausgehend von Bowdens Untersuchungen über Reibungverschleiß wird die Rolle örtlicher Energiekonzentrationen und deren Bedeutung für chemische Reaktionen diskutiert. Die Auflockerung des Gefüges durch Kornzerteilung infolge dieser hohen, lokalen Energiedichten führt zu stark aktivierten, reaktionsfähigen Grenzbereichen. Ähnliche Erscheinungen werden auch beim Kavitationsangriff beobachtet, obwohl der Mechanismus (Energiekonzentration durch Blasenimplosion) verschieden ist.

Unter Verschleiß versteht man in der Technik das unerwünschte „mechanische“ Abtragen von Stoffteilchen von einem Festkörper, im Gegensatz zur Korrosion, bei welcher chemische oder elektrochemische Vorgänge zu einer ungewollten Veränderung der Grenzfläche des angegriffenen, festen Stoffes führen. Häufig, aber durchaus nicht immer, ist damit ebenfalls eine Abtragung, von der Grenzfläche her beginnend, verbunden.

Der Verschleiß, der ebenso wie die Korrosion ein wirtschaftliches Problem ersten Ranges darstellt, hat bis heute bei weitem nicht die Aufmerksamkeit auf sich gezogen, die ihm eigentlich gebührt. Selbst wenn man angesichts der sich anbahnenden Konsumationstechnik einer gelenkten Großwirtschaft im dauernden Verschleiß noch mehr eine Gewähr für stetige oder erhöhte Produktion wesentlicher Verbrauchsgüter sieht, bieten die dem Verschleiß zugrunde liegenden Vorgänge doch auch in anderer Hinsicht recht interessante Aspekte für die wissenschaftliche und technische Forschung, zumal unsere Kenntnis vom gesteuerten Verschleiß bei Mahl-, Schleif- und Polierprozessen u. a. m. keineswegs in allen Einzelheiten eine genügende ist.

Das mechanische Abtragen von Stoffteilchen setzt ein „Verschleißmittel“ voraus; den Vorgang nennen wir den „Verschleißangriff“; er spielt sich im wesentlichen<sup>1</sup> an der Grenzfläche Verschleißmittel-Festkörper ab. Vom grundsätzlichen Standpunkt sind es zwei Arten von Verschleiß, deren Studium besonders verlockend ist:

A. Verschleiß bei gleitender Trockenreibung;

B. Verschleiß durch Hohlraumbildung in Flüssigkeiten (Kavitation).

A. Die Gesetzmäßigkeit der Trockenreibung findet in der bekannten Reibungsformel ihren äußeren Ausdruck<sup>2</sup>:  $R = \mu P$ . Sie besagt, daß die Reibungskraft  $R$  der Last  $P$  proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor  $\mu$  ist eine von der Kombination Festkörper-Verschleißmittel abhängige Größe, in welcher der Oberflächenzustand und sein Schicksal während des Vorganges enthalten ist.

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen Reibung und Verschleiß? Um diese Frage zu beantworten, haben wir zunächst die Ursache für die Reibung zu untersuchen, das heißt das Reibungsgesetz vom atomistischen Standpunkt zu deuten. Wir folgen hierbei den Überlegungen von F. P. Bowden<sup>3</sup>. Unsere Vorstellung vom Aufbau der Feststoffe aus Atomen oder Ionen legt die Vermutung nahe, daß es gar keine absolut glatten Flächen gibt. Dies trifft tatsächlich sowohl für natürliche wie für künstlich erzeugte, z. B. polierte Oberflächen zu und gilt ohne Einschränkung bezüglich der Natur des Feststoffes, gleichgültig, ob es sich um amorphe<sup>4</sup> oder um kristallisierte Feststoffe handelt. Die Methoden, die diesen Sachverhalt nachzuweisen gestatten, sind mannigfaltig, doch können sie hier ebensowenig wie die zahlreichen Ergebnisse ausführlich behandelt werden. Es seien lediglich die Mehrfachstrahl-Interferometrie wie auch das Elektronenmikroskop erwähnt, die besonders deutlich vor Augen zu führen vermögen, daß es nicht gelingt, größere Flächen als solche mit 100 bis 1000 Å Linearabmessung ideal glatt zu polieren. Auch Spaltflächen von Kristallen machen in dieser Hinsicht wegen der stets vorhandenen Baufehler keine Ausnahme. Elektrolytisch polierte Metallflächen, die sich infolge der grundsätzlichen Einebnung von Kristallspitzen kleinster Dimension (bis zu 100 Å) durch hohe Glätte auszeichnen, sind stets wellig. Mit anderen Worten, bereits das Aufeinanderlegen von Festkörpern mit sogenannten „planen“ Flächen bedeutet, daß man von einer idealen Grenzfläche weit entfernt ist<sup>5</sup>.

Die tragende (wahre) Fläche zwischen Feststoff 1 und 2 — wir sprechen deshalb von einem Grenzbereich — ist daher außerordentlich klein im Vergleich zu der Gesamtfläche, so daß der auf diesen Spitzen lagernde Druck sehr hoch wird. Es sei im Hinblick auf die daraus folgenden Verschleißvorgänge vorweggenommen, daß die Feinteiligkeit der Ablösung in einer Korrelation zur Oberflächenspannung steht bzw. daß das Abtrennen der feindispersen Teilchen sehr viel mehr von der Oberflächenspannung abhängt, als die Loslösung großer Teilchen. In diese Richtung fallen die

<sup>1</sup> Diese Einschränkung geschieht deshalb, weil beim Verschleiß auftretende Beanspruchungen gelegentlich auch zu Materialzerstörungen unmittelbar unter der Oberfläche führen können.

<sup>2</sup> Aus dieser Beziehung folgt unmittelbar die Reibungsarbeit  $A$ , die in Form von Wärme und als Verschleißenergie (Vergrößerung der Oberflächenenergie infolge der Zerteilung, Erhöhung des Energieinhaltes durch Gitterstörung) auftritt.

<sup>3</sup> Thomas Hawksley Lecture, 1955.

<sup>4</sup> Besser ist der Ausdruck röntgenamorph — das heißt keinerlei Merkmale einer Fernordnung.

<sup>5</sup> Im übrigen würde auch für eine ideale Grenzfläche ein Reibungsproblem bestehen, da die freien Valenzen an der Oberfläche wirksam werden (Adhäsion). In diesem Falle geht die aufzuwendende Reibungsarbeit — ähnlich wie die innere Reibung — praktisch allein in Wärme und nicht in Verschleißenergie über! Lediglich als Folge der thermischen Schwankungserscheinungen können dann Teile von Feststoff 1 nach Feststoff 2 übergehen und Verschleiß verursachen.



interessanten Versuche von W. v. Engelhardt<sup>6</sup>, der den Verschleiß in Abhängigkeit von polaren und unpolaren Flüssigkeiten studierte.

Für den Fall plastisch leicht verformbarer Feststoffe, wie Metalle und Legierungen, leiten F. P. Bowden und D. Tabor<sup>7</sup> in überzeugender Weise das Reibungsgesetz auf Grund des tatsächlichen strukturellen Verhältnisses her. Die Mikrospitzen verformen sich unter dem hohen Druck, bis ein Gleichgewicht  $p_m f = P$  erreicht ist, worin  $f$  die sich einstellende wahre Fläche,  $p_m$  die Fließgrenze des Werkstoffes bezeichnen. Das Überraschende dabei ist, daß selbst Belastungen von wenigen Gramm je Quadratcentimeter genügen, um derartig hohe Druckspitzen hervorzurufen. Am einfachsten läßt sich der Nachweis der Existenz solcher Druckspitzen im Falle des Verschleißes durch den dadurch bewirkten Übergang von 1 nach 2, also z. B. Übertragung von Metallteilchen vom Festkörper auf das Verschleißmittel oder umgekehrt erbringen. Hier erweist sich die radioaktive Tracer-Methode allen anderen überlegen.

Im Lichte dieses verfeinerten Bildes entsteht Reibung beim Überwinden der durch die an den Druckspitzen entstandenen Verschweißungen der Partner 1 und 2. Wird die Festigkeit dieser Verschweißungen mit  $\tau_{1,2}$  bezeichnet, so beträgt die zur Bewegung erforderliche Gesamtkraft  $R = \tau_{1,2} \cdot f$ . Der Reibungskoeffizient:

$$\mu = \frac{R}{P} = \frac{\tau_{1,2} \cdot f}{p_m \cdot f} = \frac{\tau_{1,2}}{p_m}$$

ist demnach unabhängig von Last und Gesamtfläche. Der Trockenverschleiß einfachster Art erklärt sich zwangsläufig aus dieser Vorstellung dadurch, daß die Mikrospitzen teilweise oder ganz abgetrennt werden (Scherfestigkeit  $\tau_1$  oder  $\tau_2$  kleiner als  $\tau_{1,2}$ ).

Das Modell läßt sich beliebig verfeinern und auch den Unterschied zwischen Reibung und Gleitreibung bzw. Idealreibung ohne Verschleiß bzw. Reibung mit Verschleiß verstehen. Zwischen diesen beiden Fällen liegt bereits das Problem der ersten Veränderung der Oberflächen (bzw. des Grenzbereiches) durch plastisches Verformen der Mikrospitzen ohne deren Ablösung, das heißt das Glätten der Flächen (z. B. beim Einlaufen).

Bevor aber auf diese Erscheinung näher eingegangen wird, sei festgestellt, daß sog. nackte Flächen praktisch nicht existieren. Die Oberfläche der Feststoffe ist wegen der eben erwähnten, nach außen gehenden, freien Valenzen stets von artfremden Atomen, Molekeln — teilweise oder völlig — in einfacher, ja häufig in mehrfacher Schicht bedeckt. Die artfremde Bedeckung kann dabei auf eine van der Waals-Adsorption (schwache Wechselwirkungsenergie zwischen Fremtteilchen und Feststoff von wenigen kcal/Mol) oder auf Chemisorption (etwa 10fache Größe dieser Bildungsenergie) zurückgehen. Fast allgegenwärtig auf Oberflächen von Festkörpern ist Wasser, das vermöge seines starken Dipolcharakters besonders leicht festgehalten wird. Bei den meisten Metallen und vor allem bei den technisch wichtigen Legierungen besteht vielfach eine mehr oder weniger geschlossene Oxydhaut, wodurch das Problem des Reibungsverschleißes — schon das der reinen Gleitreibung — sehr viel verwickelter wird<sup>8</sup>.

Eine Konsequenz ganz eigener Art zieht das Bestehen hoher Druckspitzen nach sich, nämlich das Auftreten hoher Temperaturen. Die Temperatur des Verschleißmittels bzw. des Festkörpers oder der mittlere Temperaturanstieg während des Ver-

<sup>6</sup> Bohrtechn. Ztg. **61**, 707 (1943).

<sup>7</sup> In R. Gomer, C. S. Smith: Structure and Properties of Solid Surfaces. The University of Chicago Press. 1953.

<sup>8</sup> Die praktisch vorliegenden Verhältnisse sind es, die überhaupt erst die uns bekannten Reibungserscheinungen bewirken. Vollkommen nackte Stoffe, z. B. Metalle, verschweißen an der Grenzfläche völlig. Es kann dann wohl der Verschleißvorgang definiert werden, aber ein definierter Reibungskoeffizient besteht nicht.



schleißvorganges sagt gar nichts über die im Grenzbereich sich abspielenden Prozesse aus. Eine überschlägige Rechnung ergibt bereits, daß die an den wirksamen Flächen entwickelte Wärme sehr viel rascher entsteht, als sie durch Wärmeleitung<sup>9</sup> abgeführt werden kann. Es liegen aber nunmehr auf ganz verschiedenen Wegen gewonnene experimentelle Befunde vor, die unmittelbar derartige Temperaturspitzen (gelegentlich bis zu 2000 °C) bei der einfachen Gleitreibung anzeigen. In sehr eleganter Form haben dies Bowden und Ridler<sup>10</sup> getan, indem sie für Verschleißmittel-Festkörper eine solche Kombination wählten, die eine Thermospannung liefert. Von diesen Versuchen gibt Abb. 1 eine oszillographische Aufnahme. Wie K. Dies<sup>11</sup> zeigen konnte, ist das Auftreten der einzelnen sehr kurzzeitigen ( $10^{-4}$  Sek.) Temperatur-

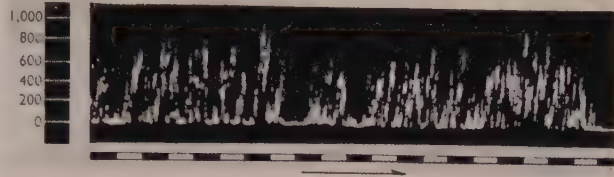


Abb. 1. Temperaturspitzen, gemessen durch oszillographische Aufnahme der Thermospannung, beim Gleiten von Konstanten auf einer geläpften Stahloberfläche,  $v = 300 \text{ cm Sek.}^{-1}$ , Zeit in 0,001 Sek., Temperatur in °C (nach Bowden)

steigerungen jeweils vom Ablösen von Teilchen begleitet. Eine erste Bestätigung für eine solche Deutung der auftretenden Thermospannung ist darin zu erblicken, daß die so registrierten Temperaturen jeweils nicht über den Schmelzpunkt des verschleißenden Stoffes steigen (vgl. Abb. 2); es läßt sich sogar bei geeigneter Versuchsführung an der Oberfläche verschiedenster Metalle das aufgeschmolzene Metall in Form mikroskopisch kleiner Tröpfchen nachweisen. Aber auch die Ergebnisse, die Bowden bei Reibung an durchsichtigen Verschleißkörpern durch Messung der Wärmestrahlung erhielt, lassen keinen Zweifel mehr an der Existenz solcher Energiekonzentrationen — hohe Druckspitzen, hohe kurzzeitige Temperaturen — aufkommen. Damit finden viele auf dem Gebiete der Gleitreibung lange bekannte Beobachtungen zwanglos ihre Erklärung. Das „Bluten“ von Stahlwellen, eines der geläufigsten Beispiele bei Trockenverschleiß, heute unter dem Namen „Reibrostbildung“ bekannt, ist nichts anderes als eine Reaktion des Eisens oder Stahls an der Luft zu  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ , die sofort unterbleibt, wenn mit sauerstofffreiem Gas gespült wird<sup>12</sup>. Dabei ist nicht die Oxydation an sich etwas Außergewöhnliches, sondern vielmehr die hohe Reaktionsgeschwindigkeit. Bereits nach einem Schleifweg von einigen tausend Metern bilden sich z. B. beim Verschleiß von Beryllium auf einer geläpften Stahlbüchse ( $1000 \text{ g/cm}^2$ ) so große Mengen an Reibrost, daß man  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$  röntgenographisch eindeutig nachweisen kann<sup>13</sup>. Da die Reaktionsgeschwindigkeit nach Arrhenius exponentiell mit der Temperatur

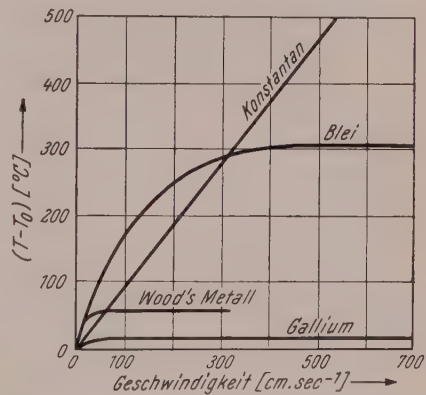


Abb. 2. Maximale Temperaturen beim Gleiten verschiedener Metalle und Legierungen auf Stahl (nach Bowden)

<sup>9</sup> Die Abgabe durch Strahlung und Übergang an den Randzonen spielt sicher nur eine untergeordnete Rolle.

<sup>10</sup> F. P. Bowden und K. E. W. Ridler: Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **154**, 640 (1936).

<sup>11</sup> In: Reibung und Verschleiß, S. 63. VDI-Verlag. 1939.

<sup>12</sup> E. Siebel und R. Kobitzsch: Verschleißerscheinungen bei gleitender, trockener Reibung. DVI-Verlag. 1941.

<sup>13</sup> Unveröffentlichte Versuche des Verfassers, 1944.

wächst, ist die Annahme einer Temperatursteigerung als Ursache für die rasche Oxydation des Eisens naheliegend. (Allerdings wirken hier auch der feindisperse und aktivierte Zustand der Teilchen auf und an der Grenzfläche im gleichen Sinne der Reaktionsbeschleunigung.) Noch ausgeprägter tritt die Reaktionsbeschleunigung bei Versuchen mit festen Oxyden selbst in Erscheinung. Beim Ritzten von Quarz ( $\text{SiO}_2$ ) mit einer Korundnadel ( $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ ) wird bereits bei mäßigen Ritzgeschwindigkeiten die Bildung von Mullit  $3\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$  beobachtet, eine Reaktion, bei der im Gegensatz zur Reibrostbildung sogar der grundsätzlich viel trägere Typus einer Fest-Fest-Reaktion besteht. Selbst im feindispersen Zustand der Ausgangskomponenten  $\text{SiO}_2$  und  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$  würde es einer erheblichen Temperatur bedürfen, um eine derartige Reaktion in Gang zu setzen. Mit G. F. Hüttig darf mit einer erhöhten Platzwechselgeschwindigkeit erst gerechnet werden, wenn  $1/2$  bis  $2/3$  der absoluten Schmelztemperatur erreicht wird. Ein weiteres Beispiel für derartige Temperatursteigerungen wird beim Mahlen von Ti-Pulver unter Wasser offenbar. Es kommt infolge der beim Reiben auftretenden lokalen Temperaturerhöhungen sofort zur Reaktion:  $\text{Ti} + 2\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{TiO}_2 + 2\text{H}_2$ , während unter normalen Verhältnissen Titanpulver  $\text{H}_2\text{O}$  keineswegs zersetzt.

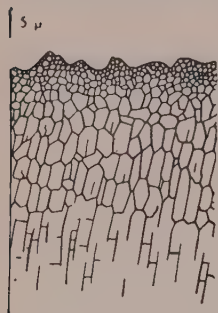


Abb. 3. Schema der Gefügeentwicklung einer polierten Oberfläche bei vielkristallinem Material (nach Raether)

Einen tiefen Einblick in die Veränderung der Oberfläche insbesondere metallischer Werkstoffe erlauben die Untersuchungen von H. Raether<sup>14</sup>, der mit Hilfe von Elektronenbeugung den Aufbau mechanisch polierter Flächen studierte. Auch diese Ergebnisse sind mit den Vorstellungen von Bowden vereinbar; denn das nach der Grenzfläche hin immer stärker unterteilte Gefüge kann als Vorstufe zum Schmelzen aufgefaßt werden (Abb. 3). Der Umbau während des Verschleißes scheint dabei ein fortlaufender zu sein: lokales Aufschmelzen wechselt mit Erstarren. Da normalerweise infolge der Berührung mit der freien Atmosphäre genügend Fremdkeime erzeugt werden, geben diese im Verein mit den großen Erstarrungsgeschwindigkeiten zu einem sehr feinen Gefüge Anlaß. Es ist Geschmackssache, ob man hier die Existenz einer sog. Beilby-Schicht annimmt oder nicht.

Diese wenigen Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie sich schon beim Verschleiß durch einfache Gleitreibung mechanische und chemische Vorgänge überlagern. Nach dem makroskopischen Aussehen trifft man daher die für die Praxis oft recht zweckmäßige Einteilung der Verschleißvorgänge in: gleichmäßiges Abtragen, starkes Fressen, Abblättern und Reiboxydation. Indessen sind dies nur Grenzfälle und meist ist eine Kopplung verschiedener Typen gegeben. Auf die mannigfachen Folgerungen, die sich daraus für die Gleitung und Schmierung ergeben, soll hier nicht weiter eingegangen werden<sup>15</sup>.

B. Äußerlich unter ganz anderen Umständen kommt es zum Kavitationsverschleiß; trotzdem bestehen merkwürdigerweise manche Parallelen mit dem eben behandelten Verschleiß durch Trockengleitung.

Diese Verschleißart tritt immer dann auf, wenn sich eine rasch bewegte Flüssigkeit infolge Absinkens des Druckes auf Dampfspannung von der Wand (Grenzfläche) abhebt. Die Voraussetzung ist jeweils ein Zweiphasengebiet: Flüssigkeit-Dampf, wobei den sich bildenden Dampfbläschen die eigentliche Rolle im Ablauf des Mechanismus zu-

<sup>14</sup> Mikroskopie 5, 101 (1950).

<sup>15</sup> E. E. Bisson, R. L. Johnson, M. A. Swikart und D. Godfrey (Nat. Advisory Committee for Aeronautics, Techn. Note 3444, 1955) heben mit allem Nachdruck die Bedeutung der Oxydfilme im Hinblick auf Reibung und Verschleiß hervor. Während z. B.  $\text{FeO}$ - und  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ -Filme reibungs- und verschleißmindernd sind, wirkt  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  im schädlichen Sinne.



kommt. Obzwar die Anschauung über das Wesen dieser Verschleißart noch nicht denselben festen Boden unter sich hat, sind die Beobachtungen beschleunigter chemischer Reaktionen als Begleiterscheinung unverkennbar. Hierher zählen die zahlreichen Befunde an kavitierten metallischen Proben, an welchen das Gefüge, ähnlich wie durch eine chemische Ätzung, sichtbar wird (Abb. 4). Ebenso bekannt sind die oft sehr kräftigen Anlauffarben. Noch auffälliger aber sind Erscheinungen, die wieder auf eine lokale Erhöhung der Energiedichte an der Grenzfläche hinweisen und deshalb durch den Begriff „Primärakt“ gekennzeichnet werden. Nicht allein, daß der Zerstörungsbereich bei Kavitation mikroskopisch klein sein kann, man weiß auch, daß der Kavitationsangriff gerade von Mikrolunkern oder -rissen gelenkt wird. Die Implosion schwingender Gasbläschen führt auch hier zu Druck- und Temperaturspitzen. Wegen der hohen Geschwindigkeit (das Zusammenstürzen entspricht einer nichtlinearen Schwingung<sup>16</sup>, so daß die Geschwindigkeit  $v \propto 1/r^2$  angenommen

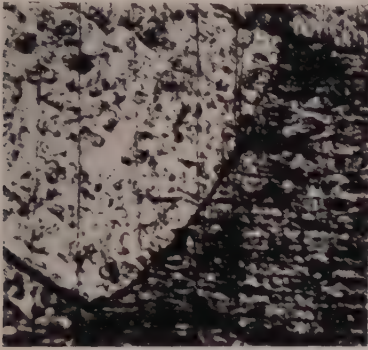


Abb. 4. Freilegung des Gefüges an einer kavitierten Messingprobe (etwa 100fach)

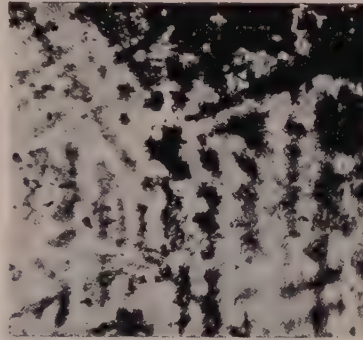


Abb. 5. Freilegung des Gefüges an einer kavitierten Rotgußprobe in der Nähe des Zerstörungskraters (etwa 10fach)

werden darf) kann trotz der stark wärmeleitenden Umgebung des Metalles und der Flüssigkeit die in  $< 10^{-4}$  Sek. erzeugte „Temperaturspitze“ nicht sofort abgebaut werden. Der Unterschied gegenüber Trockenverschleiß liegt lediglich in dem ganz verschiedenen Mechanismus der Energiekonzentration.

Der Blasenmechanismus stützt sich heute auf eine Reihe verschiedenartiger Experimente und theoretischer Betrachtungen. Als erster hat wohl Lord Rayleigh, später insbesondere H. Müller<sup>17</sup> auf den Mechanismus einstürzender Blasen in Flüssigkeiten hingewiesen und die lokale Energiekonzentration hervorgehoben. Eine eingehende Diskussion darüber wird vom Verfasser<sup>18</sup> gegeben.

Was die damit im Zusammenhang stehenden Temperatursteigerungen und chemischen Reaktionsbeschleunigungen bei Ultraschallvorgängen betrifft, sei auf die ausführliche Darstellung von L. Bergmann<sup>19</sup> verwiesen. Die hohen Energiekonzentrationen gehen eindeutig durch die bei Kavitation beobachteten Luminiszenzerscheinungen, aus der Bildung von  $H_2O_2$  in Wasser und ähnlichen, hoch aktivierten Zuständen hervor.

Eine deutliche Parallele zum Trockenverschleiß besteht auch in den strukturellen Veränderungen an der Grenzfläche des Festkörpers. Man stellt durchwegs eine Korn-

<sup>16</sup> R. Esche: Akust. Beihefte H. 4, AB 208 (1952).

<sup>17</sup> Naturwiss. 16, 423 (1928).

<sup>18</sup> In E. Siebel: Handbuch der Werkstoffprüfung, 2. Aufl. Springer-Verlag. 1955.

<sup>19</sup> Der Ultraschall, 5. Aufl. Hirzel-Verlag. 1949.



zerteilung sowie eine Aufhebung vorhandener Gefügeorientierungen (Texturen) fest, wofür in Abb. 5 als Beispiel eine mit dem Schwinggerät kavitierte Rotgußprobe mit Gußtextur angeführt ist. Die Kristallite werden kleiner und zugleich regelloser, wie

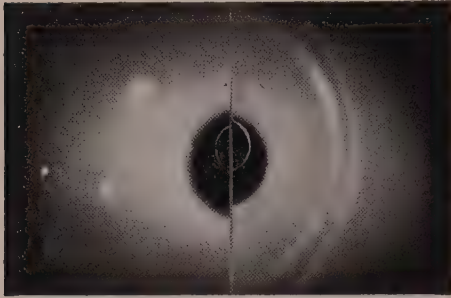


Abb. 6. Röntgen- (Rückwärts-) Aufnahmen derselben Rotgußprobe vor (a) und nach Kavitation (b); Cu-K-Strahlung

dies leicht auf röntgenographischem Wege nachgewiesen werden kann (Abb. 6). Der hierbei zur Aufnahme gelangende Bereich von zirka  $1 \text{ mm}^2$  offenbart im Stadium eines noch schwachen Angriffes, bei dem praktisch noch keinerlei merklicher Volumverlust zu erkennen ist, bereits die Kornzerteilung und Desorientierung des Gefüges gegenüber dem Ausgangszustand. Die Einzelreflexe verschwinden zugunsten von fast gleichmäßig belegten Debye-Ringen. Nicht selten lassen sich an kavitierten Metalloberflächen völlig glatte, kugelförmige Zonen im Mikroskop beobachten, die sich wenig von lokalen Aufschmelzungen unterscheiden (Abb. 7).

Neben den beim Primärakt ablaufenden chemischen Prozessen sind hier auch Sekundärvorgänge zu beachten, die ihrerseits den Angriffsmechanismus verändern und verstärken können. So werden vor Korrosion schützende Schichten, wie z. B. Al-Oxyd, bei Aluminium sehr rasch durch Kavitationsangriff zerstört, das nackte, stark unedle Metall ist dann chemisch



Abb. 7. Kavitation in Flugmotorenöl Rotring bei  $40^\circ \text{C}$  und 6 ata, etwa 10fach (nach Greif, Dtsch. Luftfahrt-Forschung, 1944)

sehr reaktionsfähig. Diese Erscheinung liegt dem Löten von Aluminium durch Ultraschalleinwirkung zugrunde. Wie schnell derartige Schichten durchschlagen werden, geht aus Abb. 8 hervor, wo Lack- bzw. Einbrennlackschichten auf Metallproben in einem Schwinggerät (10 kHz) geprüft wurden. Bereits nach wenigen Minuten bei ganz geringen Schwingweiten (0,001 cm im Wasser) lösen sich diese Schichten ab und in der Folge wird das Metall angegriffen.

Mit diesen Ausführungen soll keinesfalls der Eindruck erweckt werden, daß beim Verschleiß die rein mechanische Beanspruchung und die daraus folgende Abnutzung gegenüber den dabei sich abspielenden chemischen Vorgängen von geringerer Bedeutung

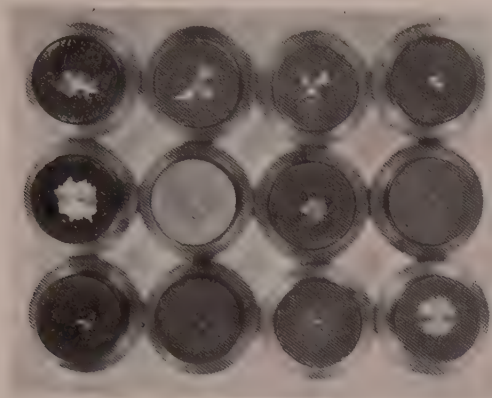


Abb. 8. Kavitationszerstörungen an lackierten Metallproben

wären: Es sollte lediglich gezeigt werden, daß chemische Vorgänge mitspielen bzw. mit den mechanischen vollkommen verquickt sein können.

(Eingegangen am 7. März 1956)

## Über eine Verallgemeinerung des Potentials auf Strömungen mit Drehung

Von Klaus Oswatitsch, Stockholm

**Zusammenfassung.** Das Strömungspotential wird in einer Weise verallgemeinert, in welcher es auch für Wirbelströmungen existiert. Im neuen Ansatz ist dabei eine Funktion zunächst unbestimmt. Ihre Verknüpfung mit den kinematischen und physikalischen Strömungseigenschaften wird gezeigt.

Wird das Strömungspotential  $\Phi$  in Verallgemeinerung der üblichen Definition als zur Geschwindigkeitsrichtung orthogonale Flächenschar definiert, so existiert es in jeder Strömung. Mit  $w$  als Geschwindigkeitsvektor und  $f(x, y, z)$  als Skalarfunktion gilt dann:

$$\text{grad } \Phi = f(x, y, z) \cdot w. \quad (1)$$

Bei drehungsfreier Strömung ist die „Maßfunktion“  $f$  im ganzen Raum gleich der Einheit und Gl. (1) stellt die übliche Definition für das Potential dar. Bei wirbelbehafteten Strömungen hingegen muß ein Zusammenhang von  $\text{grad } f$  mit der Wirbelstärke bestehen, der zunächst gesucht werden soll. Zu diesem Zwecke sei gebildet:

$$\text{rot } (\text{grad } \Phi) = 0 = \text{grad } f \times w + f \cdot \text{rot } w. \quad (2)$$

Um  $\text{grad } f$  vom Vektorprodukt mit  $w$  zu befreien, sei das äußere Produkt von Gl. (2) mit  $w$  gebildet. Nach Anwendung bekannter Vektortransformationen führt dies zu:

$$w \times (\text{grad } f \times w) = w^2 \text{grad } f - (w \text{grad } f) \cdot w = -f \cdot w \times \text{rot } w \quad (3)$$

mit der Lösung

$$w^2 \text{grad } f = -f \cdot w \times \text{rot } w. \quad (4)$$

Denn mit Gl. (4) verschwindet das innere Produkt  $\mathfrak{w} \cdot \text{grad } f$ . Der Gradient der Maßfunktion  $f$  steht also normal auf Geschwindigkeitsvektor und Wirbelvektor. Die rein kinematische Aussage (4) zeigt, daß es nicht nur für die wirbelfreie Strömung ( $\text{rot } \mathfrak{w} = 0$ ), sondern auch für die sog. „Beltrami-Strömung“ ( $\mathfrak{w} \times \text{rot } \mathfrak{w} = 0$ ) ein Potential im ursprünglichen Sinne ( $f(x, y, z) = 1$ ) gibt.

Um die Maßfunktion mit den physikalischen Größen in Verbindung zu bringen, seien hydrodynamische Gleichungen herangezogen. Als erstes Beispiel sei eine inkompressible Strömung mit Reibung betrachtet. Deren Navier-Stockes-Gleichung lautet mit  $p$  als Druck,  $\varrho$  als Dichte und  $\nu$  als kinematischer Zähigkeit:

$$\text{grad } \frac{w^2}{2} - \mathfrak{w} \times \text{rot } \mathfrak{w} = -\frac{1}{\varrho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathfrak{w}.$$

Das letzte Glied mit  $\Delta$  als Laplace-Operator stellt die Reibungskräfte dar. Haben diese ein Potential  $H$ :

$$\Delta \mathfrak{w} = -\text{grad } H, \quad (5)$$

ein Fall, der schon mehrfach behandelt wurde<sup>1</sup>, so kann die Navier-Stockes-Gleichung in der Form geschrieben werden:

$$\text{grad } \left( \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + \nu H \right) = \mathfrak{w} \times \text{rot } \mathfrak{w}. \quad (6)$$

Gl. (6) sagt aus, daß der Gradient des Klammerausdruckes auf der durch Geschwindigkeits- und Wirbelvektor gebildeten Fläche senkrecht steht. Der Klammerausdruck ist demnach auf Stromlinien konstant.

Um dies analytisch auszudrücken, seien zwei Stromflächenscharen im Raume eingeführt:

$$\psi_1(x, y, z) = \text{konst.}, \quad \psi_2(x, y, z) = \text{konst.}, \quad (7)$$

deren Schnittkurven Stromlinien darstellen sollen. Wird in Verallgemeinerung auf die anschließend behandelte kompressible Strömung der Stromdichtevektor  $\varrho \mathfrak{w}$  eingeführt, mit gegebenenfalls variabler Dichte  $\varrho$ , so gilt in Erweiterung der ebenen Stromfunktion auf den räumlichen Fall:

$$\varrho \mathfrak{w} = \text{grad } \psi_1 \times \text{grad } \psi_2, \quad (8)$$

womit die Kontinuitätsbedingung

$$\text{div } \varrho \mathfrak{w} = 0 \quad (9)$$

identisch erfüllt ist.

Nach Gl. (6) gibt es also im Inkompressiblen für den Fall, daß die Reibungskräfte ein Potential besitzen, eine verallgemeinerte „Bernoulli-Gleichung“:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + \nu H = g(\psi_1, \psi_2). \quad (10)$$

Nach Gl. (4), (6) und (10) fällt der Gradient der Maßfunktion  $f$  in Richtung des Gradienten der Bernoulli-Funktion  $g$ :

$$\frac{1}{f} \text{grad } f = -\frac{1}{w^2} \text{grad } g. \quad (11)$$

Nur für  $g = \text{konst.}$  gibt es ein Potential im ursprünglichen Sinne<sup>1</sup>.

Eine wichtige Rolle spielen in der Gasdynamik die „isoenergetischen“ Strömungen, das sind reibungsfreie stationäre Strömungen, deren einzelne Stromfäden „energetisch isoliert“ sind. Zufolge von Verlusten in Verdichtungsstößen kann

<sup>1</sup> H. Görtler und K. Wieghardt: Über eine gewisse Klasse von Strömungen zäher Flüssigkeiten und eine Kennzeichnung der Poiseuille-Strömung. Mathem. Z. 48, 247 (1942).



die Entropie (der Masseneinheit)  $s$  aber von Stromlinie zu Stromlinie variieren,  $s = s(\psi_1, \psi_2)$ . Für solche Strömungen gilt der „Croccosche Wirbelsatz“:

$$\mathfrak{w} \times \text{rot } \mathfrak{w} = -T \text{ grad } s, \quad (12)$$

mit  $T$  als absoluter Temperatur. Zusammen mit Gl. (4) gibt dies:

$$\frac{1}{f} \text{ grad } f = \frac{T}{w^2} \text{ grad } s, \quad (13)$$

ganz in Analogie zu Gl. (11). Darnach ergibt sich die Maßfunktion  $f$  aus einer Integration in Richtung des Entropiegradienten:

$$\ln f = \int \frac{T}{w^2} \underset{\text{grad } s}{\text{grad } s}, \quad (14)$$

wobei der Integrationsbeginn in eine geeignet gewählte Fläche  $s = \text{konst.}$  zu verlegen ist. Gl. (14) habe ich für den ebenen Fall bereits früher ohne Herleitung<sup>2</sup> mitgeteilt.

Unter Beschränkung auf ideale Gase können die Mach-Zahl  $M$ , die spezifischen Wärmen  $c_p, c_v$  und ihr Verhältnis  $\kappa$  in Gl. (13) oder (14) eingeführt werden:

$$\text{grad } (\ln f) = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{M^2} \text{ grad } \frac{s}{c_p - c_v}. \quad (15)$$

Bei einem bestimmten Entropiegefälle ist das Gefälle der Maßfunktion  $f$  also um so kleiner, je höher die Mach-Zahl ist.

Zur Frage, ob die vorausgegangenen Überlegungen über das Grundsätzliche hinaus auch für die analytische Berechnung von Strömungen Bedeutung haben, sei noch eine Anmerkung gemacht. Bei ebenen oder achsensymmetrischen wirbelbehafteten Strömungen existiert immer eine einfache Stromfunktion, die in der Anwendung dem nach Gl. (1) verallgemeinerten Potential vorzuziehen sein dürfte. Bei allgemein räumlicher Strömung jedoch muß eine zweite Stromfunktion hinzugezogen werden, was für die Verallgemeinerung des Potentials spricht.

<sup>2</sup> K. Oswatitsch: Gasdynamik, S. 195. Wien: Springer-Verlag. 1952.

(Eingegangen am 20. Februar 1956)

## Periodisches Temperaturfeld im Keil

Von H. Parkus, Wien

**Zusammenfassung.** Die Temperaturverteilung im unendlichen Keil wird berechnet, wenn ein Schenkel auf konstanter Temperatur gehalten und dem zweiten Schenkel eine periodisch veränderliche Temperatur aufgeprägt wird.

Als Vorbereitung zur Untersuchung der Wärmespannungen in einem zylindrischen Körper mit Keilquerschnitt, der periodisch veränderlichen Randtemperaturen ausgesetzt ist, soll im nachstehenden zunächst das im Keil herrschende Temperaturfeld berechnet werden.

Der Keil erstreckt sich ins Unendliche, sein Öffnungswinkel sei  $\alpha$ . Ein Schenkel wird auf konstanter Temperatur  $T = 0$  gehalten, während dem zweiten Schenkel eine periodisch veränderliche Temperatur aufgeprägt wird. Ein derartiges Wärmeleitungsproblem tritt z. B. in einer Staumauer mit Keilquerschnitt auf, bei der die Wasserseite angenähert konstante Temperatur aufweist, während die Temperatur der Luftseite mit der Tages- bzw. Jahreszeit schwankt.

Mit Einführung von Polarkoordinaten  $r, \varphi$  lauten die Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} T &= \vartheta e^{i\omega t} & \text{in } \varphi = 0, \\ T &= 0 & \text{in } \varphi = \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$\vartheta$  ist die Amplitude und  $\omega$  die Kreisfrequenz der aufgeprägten Temperaturschwankung. Im Inneren des Keiles gilt die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T \equiv a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right), \quad (2)$$

$a$  bedeutet die Temperaturleitzahl des Materials<sup>1</sup>.

Spaltet man mit dem Ansatz

$$T = \vartheta e^{i\omega t} U(r, \varphi) \quad (3)$$

den Zeitfaktor ab, so ergibt sich nach Einsetzen in Gl. (2)

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0$$

mit

$$k^2 = -i \frac{\omega}{a}$$

oder nach Einführung der komplexen Veränderlichen

$$z = i k r = \varrho e^{i\pi/4}, \quad \varrho = r \sqrt{\frac{\omega}{a}}, \quad U(r, \varphi) = V(z, \varphi), \quad (4)$$

etwas einfacher

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} - V = 0. \quad (5)$$

Hierbei wurde das Vorzeichen in  $k$  so gewählt, daß  $z$  positiven Realteil besitzt. Die zugehörigen Randbedingungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} V &= 1 & \text{in } \varphi = +0, \\ V &= 0 & \text{in } \varphi = \alpha - 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Gl. (1) sind dabei in dem Sinne präzisiert, daß die vorgeschriebenen Randwerte bei senkrechter Annäherung an den Rand erreicht werden sollen.

Die Aufgabe, Lösungen der „Schwingungsgleichung“  $\nabla^2 U + k^2 U = 0$  in Polarkoordinaten zu finden, wurde wesentlich gefördert durch eine von Kontorovich und Lebedev im Jahre 1938 eingeführte Integraltransformation<sup>2</sup>. Eine der Formen, in der diese Transformation geschrieben werden kann, lautet:

$$\left. \begin{aligned} g(z) &= \int_0^\infty f(s) K_{is}(z) ds, \\ f(s) &= \frac{2}{\pi^2} s \sin \pi s \int_0^\infty g(z) \frac{K_{is}(z)}{r} dr. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$K_\nu(z)$  bedeutet die modifizierte Bessel-Funktion dritter Art (Bassetsche oder Macdonaldsche Funktion), die der Differentialgleichung

$$K_\nu''(z) + \frac{1}{z} K_\nu'(z) - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) K_\nu(z) = 0$$

genügt.

<sup>1</sup> Zahlenwerte für  $a$  sind angegeben bei E. Melan und H. Parkus: Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wien: Springer-Verlag, 1953.

<sup>2</sup> M. J. Kontorovich and N. N. Lebedev: On a method of solution of some problems of the diffraction theory. J. Physics 1, 229 (1939), sowie eine Reihe weiterer Arbeiten von N. N. Lebedev. — Vgl. auch Erdélyi-Magnus-Oberhettinger-Tricomi: Tables of integral transforms, Vol. II, S. 173. New York: McGraw-Hill, 1954.

Beachtet man nun, daß die Funktionen  $e^{-z \sin \varphi}$  und  $\mathfrak{S}in(\varphi s) K_{is}(z)$  bei beliebigem  $s$  partikuläre Lösungen von Gl. (5) sind, so folgt mit Rücksicht auf die erste Gl. (7) — die zweite benötigen wir hier weiter nicht — unmittelbar der Ansatz

$$V(z, \varphi) = e^{-z \sin \varphi} + \int_0^{\infty} A(s) \mathfrak{S}in(\varphi s) K_{is}(z) ds \quad (8)$$

mit einer zunächst noch willkürlichen Funktion  $A(s)$ . Dieser Ansatz befriedigt bereits die erste der beiden Randbedingungen (6). Die zweite Bedingung verlangt

$$\int_0^{\infty} A(s) \mathfrak{S}in(\alpha s) K_{is}(z) ds = -e^{-z \sin \alpha}. \quad (9)$$

Nun gilt aber, vorerst für reelles  $\beta$ ,

$$\int_0^{\infty} \cos(\beta s) K_{is}(z) ds = \frac{\pi}{2} e^{-z \mathfrak{G}of \beta}, \quad (10)$$

wie man mittels der Integraldarstellung

$$K_{is}(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \mathfrak{G}of \lambda} \cos(\lambda s) d\lambda, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

und Anwendung des Fourierschen Integraltheorems leicht nachweist. Das Integral in Gl. (10) konvergiert aber auch noch für rein imaginäres  $\beta = i\mu$ , vorausgesetzt, daß  $|\mu| + |\gamma| < \frac{\pi}{2}$ , wobei  $z = \varrho e^{i\gamma}$ . Dies folgt unmittelbar aus der für große  $s$  gültigen asymptotischen Beziehung

$$|K_{is}(\varrho e^{i\gamma})| \sim \sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{-\left(\frac{\pi}{2} - |\gamma|\right)s}.$$

Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung gilt daher Gl. (10) auch noch für  $\beta = i\mu$ , wobei im vorliegenden Falle  $\gamma = \pi/4$ . Man erhält dann durch Vergleich der Gl. (9) und (10)

$$A(s) = \frac{-2}{\pi \mathfrak{S}in \alpha s} \mathfrak{G}of\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)s$$

und damit die Lösung

$$V(z, \varphi) = e^{-z \sin \varphi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{S}in \varphi s}{\mathfrak{S}in \alpha s} \mathfrak{G}of\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)s K_{is}(z) ds, \quad \left(\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}\right). \quad (11)$$

Da  $\mathfrak{S}in \varphi s / \mathfrak{S}in \alpha s$  monoton und beschränkt ist in  $s$  für  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ , konvergiert das Integral in (11) gleichmäßig und stellt daher eine stetige Funktion von  $\varphi$  dar. Die zweite Randbedingung (6) ist somit in der Tat erfüllt.

Die Einschränkung für den Keilwinkel,  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ , die der Lösung (11) auferlegt werden muß, um Konvergenz des Integrals zu erreichen, würde gerade ihre Anwendung auf das Staumauerproblem unmöglich machen, da dort im allgemeinen kleinere Öffnungswinkel auftreten. Man kann sich aber von dieser Einschränkung wie folgt befreien: Man berechnet die Funktion  $V(z, \varphi)$  in der komplexen  $z$ -Ebene zuerst längs der positiven reellen Achse  $z = x$ . Entlang dieser Achse konvergiert das Integral in (11) wegen  $\gamma = 0$  für alle Öffnungswinkel  $0 < \alpha < \pi$ . Nunmehr setzt man die Funktion  $V(z, \varphi)$  in dem interessierenden Bereich für  $r$  mittels Potenzreihenentwicklung in Komplexe fort, und zwar benötigt man wegen  $\gamma = \pi/4$  ihre Werte nur entlang der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten. Der Ursprung  $z = 0$  ist Verzweigungspunkt.

Das Verfahren bietet außerdem den für die numerische Berechnung des Integrals beachtlichen Vorteil, daß  $K_{is}(z)$  für reelles  $z = x$  gleichfalls reell wird.

(Eingegangen am 29. Februar 1956)



# Die Schallgeschwindigkeit in dissoziierenden Gasen

Von W. Peschka, Wien

Mit 2 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Unter der Annahme, daß jeder Dissoziationsteilnehmer ein ideales Gas ist, ergibt sich eine Beziehung für die Schallgeschwindigkeit in dissoziierenden Gasen.

Es wird gezeigt, daß für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit die Kenntnis von  $\kappa$  (Adiabatexponent) nicht nötig ist, da alle nötigen Größen aus dem gegebenen  $i$ - $s$ - oder  $T$ - $s$ -Diagramm entnommen werden können.

## Bezeichnungen

$c_p, C_p$ spezifische Wärme bei konstantem Druck,	} klein geschrieben auf die Masseneinheit, groß geschrieben auf ein Mol bezogen.
$i, I$ Enthalpie,	
$s, S$ Entropie,	
$c$ Schallgeschwindigkeit,	$T$ absolute Temperatur,
$M$ Mach-Zahl,	$K_p$ Gleichgewichtskonstante,
$\mathfrak{R}$ allgemeine Gaskonstante,	$p$ Druck,
$\varrho$ Dichte,	$\mu$ Molekulargewicht.

Die Schallgeschwindigkeit eines idealen Gases ist bekanntlich eine reine Temperaturfunktion. Gehorcht ein Gas nicht mehr der Zustandsgleichung des idealen Gases, dann ist dies nicht mehr der Fall. Sehr oft sind aber die Abweichungen gering, so daß die Schallgeschwindigkeit eines realen Gases oft genau so berechnet werden kann wie die eines idealen Gases.

Tritt aber Dissoziation auf, so gehorcht das Gas überhaupt nicht mehr der Zustandsgleichung des idealen Gases, das Verhältnis  $\frac{c_p}{c_v} = \kappa$  ist keine Konstante und die Enthalpie keine reine Temperaturfunktion, sondern sie wird noch druckabhängig.

Stehen mehrere Gase — die auch noch miteinander chemisch reagieren können — untereinander und mit ihren Dissoziationsprodukten im thermodynamischen Gleichgewicht, so gilt folgendes:

$$n_1 A_1 + n_2 A_2 + \dots = \bar{n}_1 \bar{A}_1 + \bar{n}_2 \bar{A}_2 + \dots$$

Dabei sind  $A_1, A_2 \dots$  die Ausgangsstoffe und  $\bar{A}_1, \bar{A}_2 \dots$  die gebildeten, wobei noch  $n_1, n_2 \dots, \bar{n}_1, \bar{n}_2$  die Anzahl der Mole der betreffenden Reaktionsteilnehmer sind.

Haben die einzelnen Bestandteile  $A_v, \bar{A}_v$  die Partialdrücke  $p_1, p_2, \dots \bar{p}_1, \bar{p}_2 \dots$  usw., so gilt für sie:

$$\frac{\bar{p}_1^{\bar{n}_1} \cdot \bar{p}_2^{\bar{n}_2} \dots}{p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots} = K_p(T).$$

Dabei ist  $K_p$  — die sogenannte „Gleichgewichtskonstante“ — eine reine Temperaturfunktion, die der van't Hoff'schen Gleichung genügt:  $d(\ln K_p) = \frac{\Delta I}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{dT}{T^2}$ , wobei  $\Delta I$  die Reaktionsenthalpie ist.

Es sollen nun speziell Gase betrachtet werden, deren Temperatur so hoch ist, daß thermische Dissoziation auftritt. Der Gleichgewichtszustand ist dann durch obige Beziehungen gegeben. Als Zustandsgleichung des Gases erhält man unter der Annahme, daß das Gasgemisch dem Daltonschen Gesetz genügt,

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\mathfrak{R}}{\mu(T, \varrho)} \cdot T. \quad (1)$$

$\mu(T, \varrho)$  wird als „mittleres Molekulargewicht“ eingeführt. Die Zustandsgleichung unterscheidet sich also von der eines idealen Gases dadurch, daß eine Funktion  $\mu(T, \varrho)$ , das „mittlere Molekulargewicht“, auftritt, während beim idealen Gas diese Funktion eine Konstante und gleich dem Molekulargewicht ist.

Die Schallgeschwindigkeit ist allgemein definiert als:

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_s. \quad (2)$$

Bildet man nun aus Gl. (1)  $c^2$ , so erhält man:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_s = \frac{\Re T}{\mu} + \frac{\varrho \Re}{\mu} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \varrho} \right)_s - \frac{\varrho \Re}{\mu^2} \cdot T \cdot \left( \frac{\partial \mu}{\partial \varrho} \right)_s$$

mit  $\left( \frac{\partial T}{\partial \varrho} \right)_s = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_s$  und  $\left( \frac{\partial \mu}{\partial \varrho} \right)_s = \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_s$  ergibt sich:

$$c^2 = \frac{\Re}{\mu} \cdot T \cdot \frac{1}{1 - p \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s \right]} \quad (3)$$

oder auch nach leichter Umformung:

$$c^2 = \frac{\Re}{\mu} \cdot T \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varrho \Re}{\mu} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \cdot \left[ 1 - \frac{T}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_s \right]}. \quad (4)$$

Die Schallgeschwindigkeit kann also folgendermaßen geschrieben werden:

$$c^2 = \lambda(T, p) \cdot \frac{\Re}{\mu} T, \quad (5)$$

wobei

$$\frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \cdot \left[ 1 - \frac{T}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_s \right]. \quad (6)$$

Für das ideale Gas gilt folgendes:

$$\left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_s = 0, \quad \Re = C_p - C_v, \quad I = C_p \cdot T, \quad dS = \frac{dI}{T} - \Re \frac{dp}{p},$$

für konstantes  $S$  ist also  $\frac{dI}{T} = \Re \frac{dp}{p}$  oder  $C_p \frac{dT}{T} = \Re \frac{dp}{p}$  und

$$\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{dT}{dp} = \frac{\Re T}{C_p \cdot p} = \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{1}{C_p},$$

daher  $\lambda(T, p) = \kappa$ , also

$$c^2 = \kappa \frac{\Re}{\mu} T. \quad (7)$$

Der Faktor  $\lambda(T, p)$  darf aber im allgemeinen auf keinen Fall mit  $\kappa$  identifiziert werden, da nach Eucken<sup>1</sup> bei einem dissoziierenden Gas

$$C_p - C_v = \frac{[2 \Re T + \alpha (1 - \alpha) \Delta I]^2}{2 \Re T^2 (2 - \alpha)} \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (8)$$

( $\alpha$  = Dissoziationsgrad), also  $C_p - C_v \neq \Re$  ist.

In den Gl. (3) und (4) kommen die Stoffwerte  $\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s$  und  $\left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s$  bzw.  $\left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_s$  vor. Diese Größen entnimmt man am besten einem  $i$ - $s$ -Diagramm, das gegeben sein muß.

Die Größe  $\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s$  kann direkt entnommen werden.

Aber auch  $\left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s$  oder  $\left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_s$  kann man mit Hilfe des  $i$ - $s$ -Diagramms darstellen. Es ist überhaupt bei thermodynamischen Problemen, wo  $\kappa$  variabel ist, sehr vorteilhaft, auf Polytropenexponenten usw. überhaupt zu verzichten und direkt mit einem

<sup>1</sup> Vgl. E. Justi: Spezifische Wärme, Enthalpie und Entropie technischer Gase. Berlin: Springer-Verlag. 1939.

Entropiediagramm zu arbeiten, da man dann das Auftreten von  $\kappa$ ,  $c_p$  usw. vermeiden kann, da nur Enthalpie, Entropie, Druck oder Temperatur in den Gleichungen vorkommen.

Das mittlere Molekulargewicht kann nun folgendermaßen aus dem  $i$ - $s$ -Diagramm entnommen werden:

Entlang einer Isotherme gilt:

$$(dq)_T = (di)_T - \left(\frac{dp}{\varrho}\right)_T \quad i = i(p, T),$$

mit  $dq = T \cdot ds$ ,  $(di)_T = \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T dp$  und  $(ds)_T = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \cdot dp$  erhält man

$$\frac{1}{\varrho} = \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - T \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T,$$

mit Gl. (1) ergibt sich:

$$\varrho = \frac{p \cdot \mu(T, p)}{\Re T} = \frac{1}{\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - T \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T}, \quad (9)$$

daraus erhält man:

$$\mu(T, p) = \frac{\Re T}{p} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - T \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T}. \quad (10)$$

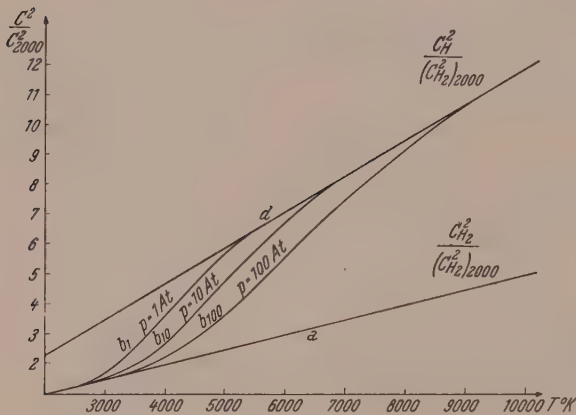


Abb. 1

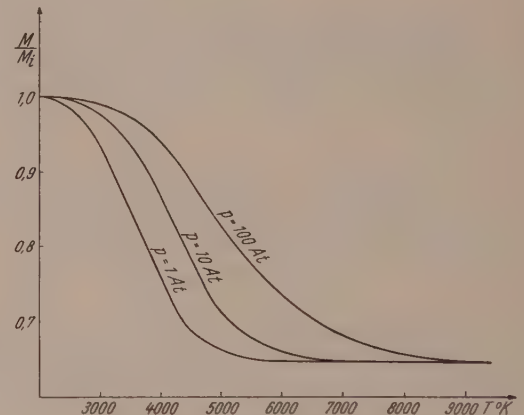


Abb. 2

Ist  $T$  groß genug, dann kann man  $\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T$  gegen  $T \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$  vernachlässigen und man bekommt:

$$\mu(T, p) = -\frac{\Re}{p} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_T \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \neq 0.$$

Das kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mu(T, p) = -\Re \cdot \left(\frac{\partial \ln p}{\partial s}\right)_T. \quad (11)$$

Das mittlere Molekulargewicht eines Gasmisches, das mit seinen Komponenten im thermodynamischen Gleichgewicht steht, ist also in einem Koordinatensystem mit halblogarithmischer Teilung gleich dem negativen Anstieg der Tangente an die Isotherme.

Die Ergebnisse für Wasserstoff sind in den Abb. 1 und 2 wiedergegeben. Das  $I$ - $S$ -Diagramm wurde vom Verfasser berechnet und dem Berechnungsgang zugrunde gelegt<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Noch nicht veröffentlichte Arbeit.



Die Gerade  $a$  gibt die Schallgeschwindigkeit des Wasserstoffs  $H_2$  (Abb. 1). Die Kurven  $b_v$  geben die Schallgeschwindigkeit mit dem Druck als Parameter. Die Gerade  $d$  gibt die Schallgeschwindigkeit des atomaren Wasserstoffs  $H$ .

Bei gleichen Temperaturen wird die Schallgeschwindigkeit mit zunehmendem Druck  $p$  kleiner, weil Reaktionen, bei denen sich die Molzahl ändert, druckabhängig sind. Und zwar versucht nach dem Prinzip von Chatelier-Braun eine Druckerhöhung die Reaktion rückgängig zu machen, wenn bei der Reaktion die Molzahl zunimmt. Da die Wasserstoffdissoziation mit einer Zunahme der Molzahl verbunden ist, wird durch eine Druckerhöhung das Dissoziationsgleichgewicht zum molekularen Wasserstoff hin verschoben. Aus diesem Grund wird auch die Schallgeschwindigkeit mit zunehmendem Druck kleiner, weil eben dadurch die Bildung von  $H_2$  begünstigt wird. Abb. 2 zeigt noch die Abhängigkeit der Mach-Zahl. Hier ist  $M/M_i$  als Funktion der Temperatur mit dem Druck als Parameter aufgetragen.  $M_i$  ist dabei die Mach-Zahl der Vergleichsströmung gleicher Geschwindigkeit und gleicher Temperatur eines idealen Gases. Es sei noch erwähnt, daß die Beziehungen Gl. (10), (11), (5) und (6) nicht nur für die thermische Dissoziation gelten, sondern überhaupt auf miteinander reagierende Gasgemische anwendbar sind, solange jedes Gas für sich der Zustandsgleichung des idealen Gases genügt und das Daltonsche Gesetz erfüllt ist.

(Eingegangen am 7. Februar 1956)

## Über eine spezielle nichtlineare Differentialgleichung

Von K. Prachar und L. Schmetterer, Wien

**Zusammenfassung.** Ausgehend von einer speziellen nichtlinearen Randwertaufgabe aus der Kernphysik wird für eine etwas allgemeinere Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen mittels eines Iterationsverfahrens die Existenz gewisser Lösungen nachgewiesen.

In einem Problem der Kernphysik trat die folgende Differentialgleichung auf:

$$y'' + \frac{2}{x} y' (1 - y'^2) = y(1 - y'^2)^{3/2}, \quad (1)$$

welche mit den Randbedingungen

$$y \sim \frac{e^{-x}}{x}, \quad y' \sim \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-x}}{x} \right)^1 \text{ für } x \rightarrow \infty \quad (2)$$

zu integrieren ist<sup>2</sup>.

Die rechte Seite der Differentialgleichung (1) ist nur für  $|y'| \leq 1$  reell. Unter Berücksichtigung dessen machen wir die Substitution

$$y' = \cos z, \quad v = \operatorname{ctg} z \quad (3)$$

und erhalten aus (1) das System<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} v' + \frac{2}{x} v &= y, \\ y' &= \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei in der zweiten Gl. (4) der positive Wert der Wurzel zu nehmen ist.

<sup>1</sup>  $a(x) \sim b(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  bedeutet, wie üblich,  $a(x) = b(x) + o(b(x))$  für  $x \rightarrow \infty$ .

<sup>2</sup> In dieser Form wurde uns das Problem von Herrn Prof. F. Cap mitgeteilt, wofür wir ihm an dieser Stelle danken möchten.

<sup>3</sup> Für den Hinweis auf diese Substitution sind wir Herrn Prof. E. Hlawka zu besonderem Dank verpflichtet.

Wir betrachten nun in dieser Note das etwas allgemeinere System

$$\begin{aligned} v' + \frac{2}{x}v &= y, \\ y' &= f(v), \end{aligned} \quad (5)$$

wobei  $f(v)$  eine in  $-\infty < v < \infty$  definierte stetige Funktion sei, welche folgenden Bedingungen genügt:

$$f(-v) = -f(v), \quad (6)$$

also  $f(0) = 0$ ;

$$f(v) \text{ ist monoton wachsend;} \quad (7)$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f(v) = 1, \quad (8)$$

also

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f(-v) = -1, \quad (9)$$

wofür wir kurz  $f(\infty) = 1$  und  $f(-\infty) = -1$  schreiben. Diese Schreibweise gebrauchen wir auch in ähnlichen Fällen. Schließlich sei

$$0 < |f(v)| < |v| \quad \text{für} \quad |v| > 0 \quad (10)$$

und

$$f(v) = v + O(|v|^a) \quad (11)$$

für  $v \rightarrow 0$  und  $a > 1$ .

Wir bemerken zunächst, daß für  $f(v) = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$  die Voraussetzungen (6) bis (11) erfüllt sind.

Wir behaupten nun:

Unter den Voraussetzungen (6) bis (11) hat das System (5) eine Lösung, für welche

$$y(x) \sim \frac{e^{-x}}{x} \quad \text{und} \quad v(x) \sim \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-x}}{x} \right) \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty$$

gilt.

Zum Beweis betrachten wir folgendes Iterationsverfahren: Sei für  $x > 0$ :

$$y_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}, \quad (12')$$

$$v_0(x) = -\frac{e^{-x}}{x} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad (12'')$$

und für  $r \geq 0$ , ganz

$$y_{r+1}(x) = -\int_x^\infty f(v_r(u)) du, \quad x > 0, \quad (13)$$

$$v_{r+1}(x) = -\frac{1}{x^2} \int_x^\infty u^2 y_{r+1}(u) du, \quad x > 0. \quad (14)$$

Wir merken an, daß

$$v_0(x) = y_0'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-x}}{x} \right). \quad (15)$$

Nun zeigen wir das

*Lemma 1.* Für  $r \geq 1$  gilt:

$$y_r(x) > 0 \quad \text{für} \quad x > 0 \quad (16)$$

und

$$0 < y_r(0) < \infty, \quad (17)$$

$$y_{r+1}(x) < y_r(x) \quad \text{für} \quad x > 0, \quad (18)$$

$|y_r'(x)|$  nimmt für  $x > 0$  monoton ab und es ist

$$y_r'(0) = -1, \quad y_r'(\infty) = 0; \quad (19)$$

weiter ist

$$v_r(x) < 0 \quad \text{für} \quad x > 0, \quad (20)$$

$$v_r(0) = -\infty, \quad v_r(\infty) = 0, \quad (21)$$

$|v_r(x)|$  nimmt für  $x > 0$  monoton ab und

$$|v_{r+1}(x)| < |v_r(x)| \quad \text{für} \quad x > 0. \quad (22)$$

Dabei ist unter monoton stets eigentlich monoton zu verstehen und dort, wo an der Stelle  $x = 0$  Grenzwerte zur Definition herangezogen werden müssen, sind diese stets aus dem Innern des Intervalls  $0 < x < \infty$  ausgeführt zu denken.

Wir beweisen dieses Lemma durch vollständige Induktion nach  $r$ . Zunächst hat man

$$y_1(x) = - \int_x^\infty f(v_0(u)) du, \quad x > 0 \quad (23)$$

und dieses Integral existiert wegen (10) und (12''). Überdies ist  $y_1(x) > 0$  für  $x > 0$  wegen  $v_0(u) < 0$  und  $f(v_0(u)) < 0$  für  $u < 0$ . Wegen  $v_0(0) = -\infty$  und (9) existiert das Integral (23) auch noch für  $x = 0$ , also gilt  $y_1(0) < \infty$ , aber natürlich auch  $> 0$ .

Aus (23) folgt

$$y_1'(x) = f(v_0(x)), \quad x > 0 \quad (24)$$

und für  $x \rightarrow +0$  folgt wegen  $v_0(0) = -\infty$  und (9)  $y_1'(0) = -1$ . Andererseits ergibt sich für  $x \rightarrow \infty$   $v_0(\infty) = 0$  und wegen  $f(0) = 0$   $y_1'(\infty) = 0$ .

Da  $f(v)$  für negatives  $v$  wegen (6) und (7) ebenfalls negativ ist, folgt aus (24)  $y_1'(x) < 0$  für  $x > 0$ . Da  $v_0(x)$  mit wachsendem  $x$  und  $f(v)$  mit wachsendem  $v$  wächst, so wächst nach (24)  $y_1'(x)$  mit wachsendem  $x$ , also fällt  $|y_1'(x)|$ .

Weiter ist

$$v_1(x) = - \frac{1}{x^2} \int_x^\infty y_1(u) u^2 du, \quad x > 0 \quad (25)$$

und dieses Integral existiert; nach (23) ist nämlich bei Berücksichtigung von (10) und (15)

$$y_1(x) < - \int_x^\infty v_0(u) du = y_0(x), \quad x > 0. \quad (26)$$

Wegen  $y_1(u) > 0$  folgt aus (25)  $v_1(0) = -\infty$ . Weiter ist nach (25)  $v_1(\infty) = 0$  und  $v_1(x) < 0$  für  $x > 0$ , so daß die Formeln (20) und (21) für  $r = 1$  bewiesen sind.

Wieder wegen  $y_1(u) > 0$  folgt, daß  $|v_1(x)|$  mit wachsendem  $x$  abnimmt.

Nun bleiben noch (18) und (22) für  $r = 1$  zu beweisen. Zunächst folgt aus (25) mittels der Abschätzung (26) und wegen (12'')  $v_1(x) > v_0(x)$  für  $x > 0$ , da (14) auch für  $r = -1$  gilt. Damit ergibt sich für  $x > 0$

$$y_2(x) = - \int_x^\infty f(v_1(u)) du < - \int_x^\infty f(v_0(u)) du = y_1(x); \quad (27)$$

es ist nämlich  $-f(v_1(u)) < -f(v_0(u))$  wegen der Monotonie von  $f(v)$  und wegen  $v_1(u) > v_0(u)$ , woraus auch die Existenz des ersten Integrales in (27) folgt. (27) ergibt (18) für  $r = 1$ . Schließlich ist

$$|v_2(x)| = \frac{1}{x^2} \int_x^\infty y_2(u) u^2 du < \frac{1}{x^2} \int_x^\infty y_1(u) u^2 du = |v_1(x)|.$$

Das ergibt (22) für  $r = 1$ .



Wir nehmen nun die Behauptung des Lemmas für  $1, 2, \dots, r$  als erwiesen an und wollen zeigen, daß sie dann auch für  $r+1$  gilt.

Wir haben für  $r \geq 1$

$$y_{r+1}(x) = - \int_x^\infty f(v_r(u)) du$$

und

$$y_r(x) = - \int_x^\infty f(v_{r-1}(u)) du$$

und daraus folgt

$$y_{r+1}(x) < y_r(x) \text{ für } x > 0,$$

da nach Induktionsvoraussetzung wegen (22)  $|v_r(u)| < |v_{r-1}(u)|$  gültig ist und  $f(v)$  monoton ist. Auf diese Weise ergibt sich natürlich auch die Existenz des ersten Integrals aus der des zweiten.

Wegen  $y_{r+1}(x) < y_r(x)$  und der Existenz von

$$v_r(x) = - \frac{1}{x^2} \int_x^\infty y_r(u) u^2 du$$

(nach Induktionsvoraussetzung) folgt auch die Existenz von

$$v_{r+1}(x) = - \frac{1}{x^2} \int_x^\infty y_r(u) u^2 du$$

und dann auch die Ungleichung  $|v_{r+1}(x)| < |v_r(x)|$ . Damit sind (18) und (22) bewiesen.

Aus (13) und  $v_r(x) < 0$  für  $x > 0$  folgt aus den Eigenschaften von  $f(v)$   $y_{r+1}(x) > 0$ . Wegen  $v_r(0) = -\infty$  und (9) folgt  $y_{r+1}(0) < \infty$ . Aus  $y'_{r+1}(x) = f(v_r(x))$  ergibt sich  $y'_{r+1}(0) = -1$ ,  $y'_{r+1}(\infty) = 0$  und schließlich, daß  $|y'_{r+1}(x)|$  monoton abnimmt.

Aus (14) erhält man wegen  $y_{r+1}(u) > 0$  für  $x \rightarrow 0$   $v_{r+1}(0) = -\infty$ . Ebenso folgt aus (14), daß  $|v_{r+1}(x)|$  monoton abnimmt und daß  $v_{r+1}(\infty) = 0$  ist. Damit ist aber das Lemma 1 vollständig bewiesen.

Aus Lemma 1 folgt: Die durch (12'), (12''), (13) und (14) definierten Folgen  $y_r(x)$  und  $v_r(x)$  konvergieren für  $x > 0$  gegen Grenzfunktionen  $y(x)$  und  $v(x)$ , die für  $x > 0$  endlich sind.

Wir zeigen, daß die so definierten Funktionen  $y(x)$  und  $v(x)$  Lösungen des Systemes (5) sind. Da nämlich  $y_r(x)$  monoton gegen  $y(x)$  für  $x > 0$  konvergiert, folgt aus (14)

$$v(x) = - \frac{1}{x^2} \int_x^\infty y(u) u^2 du \quad \text{für } x > 0 \quad (28)$$

und damit die Stetigkeit von  $v(x)$ .

Daraus sowie aus der monotonen Konvergenz von  $v_r(x)$  und den Eigenschaften von  $f(v)$  folgt aber aus (13)

$$y(x) = - \int_x^\infty f(v(x)) du. \quad (29)$$

Damit ist die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von  $y(x)$  für  $x > 0$  gezeigt und somit auch die Differenzierbarkeit von  $v(x)$  für  $x > 0$ . Unter diesen Umständen sind aber (28) und (29) damit gleichwertig, daß  $y(x)$  und  $v(x)$  (5) lösen.

Wir bemerken nun, daß die Voraussetzung (11) auch so formuliert werden kann: Es sei  $a > 0$  eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt in  $0 < |v| < a$  mit passendem  $K > 0$

$$f(v) = v + |v|^\alpha g(v) \quad (30)$$

und

$$|g(v)| \leq K. \quad (30')$$

Es sei nun für  $x \geq x(a) > 0$

$$0 < \frac{e^{-x}}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right) < a. \quad (31)$$

Wir geben ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  vor und wählen  $x(\alpha, \varepsilon)$  so groß, daß

$$2^\alpha \frac{K}{\alpha^2} x^{3-\alpha} e^{-x(\alpha-1)} < \varepsilon. \quad (32)$$

Wir halten dieses  $\varepsilon$  fest und behaupten

*Lemma 2.*

Es sei  $M > \max(x(a), x(\alpha, \varepsilon), 1)$ . Dann gilt für  $r \geq 0$

$$v_r(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-x}}{x} \right) + \varepsilon_r(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-x}}{x^2} \right) \quad (33)$$

mit

$$|\varepsilon_r(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad x \geq M \quad (34)$$

gleichmäßig für  $r \geq 0$ .

Wir beweisen dies wieder durch Induktion:

Für  $r = 0$  folgen (33) und (34) unmittelbar aus (15). Es sei die Behauptung schon für  $1, 2, \dots, r$  bewiesen. Zunächst gilt für  $r \geq 1$  und  $x > 0$

$$|v_r(x)| < |v_0(x)|, \quad (35)$$

das heißt,

$$v_r(x) > \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-x}}{x} \right). \quad (36)$$

Dies haben wir im Lemma 1 bewiesen.

Nach Induktionsvoraussetzung können wir andererseits annehmen, daß für  $x \geq M$

$$v_r(x) \leq v_0(x) - \varepsilon \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-x}}{x^2} \right) \quad (37)$$

gilt. Aus (13) und (14) folgt

$$v_{r+1}(x) = \frac{1}{x^2} \int_x^\infty z^2 \int_z^\infty f(v_r(u)) du. \quad (38)$$

Aus (38), (30) und (30') folgt für  $x \geq M$

$$v_{r+1}(x) < \frac{1}{x^2} \int_x^\infty z^2 \int_z^\infty (v_r(u) + K |v_r(u)|^\alpha) du dz$$

und weiter nach (37)

$$v_{r+1}(x) < \frac{1}{x^2} \int_x^\infty z^2 \int_z^\infty v_0(u) du dz - \varepsilon \frac{1}{x^2} \int_x^\infty z^2 \int_z^\infty \frac{d}{du} \left( \frac{e^{-u}}{u^2} \right) du dz + \frac{K}{x^2} \int_x^\infty z^2 \int_z^\infty |v_r(u)|^\alpha du dz. \quad (39)$$

Das erste in (39) rechts stehende Integral ist einfach  $v_0(x)$ , das zweite Integral hat den Wert  $\frac{\varepsilon}{x^2} e^{-x}$ .

Zwecks Abschätzung des dritten Integrals bemerken wir, daß für  $u \geq M$  aus (35)

$$|v_r(u)| < 2 \frac{e^{-u}}{u}, \quad \text{also} \\ |v_r(u)|^\alpha < 2^\alpha \frac{e^{-\alpha u}}{u^\alpha} \quad (40)$$

folgt. Somit wird

$$\begin{aligned} \frac{K}{x^2} \int_x^\infty z^2 \int_z^\infty |v_r(u)|^\alpha du dz &< \frac{2^\alpha K}{x^2} \int_x^\infty z^2 \int_z^\infty \frac{e^{-\alpha u}}{u^\alpha} du dz < \\ &< \frac{2^\alpha K}{x^2 \alpha} \int_x^\infty z^{2-\alpha} e^{-\alpha z} dz < \frac{2^\alpha K}{x^{1+\alpha} \alpha^2} \left( e^{-\alpha x} x + \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right) < \frac{2^{\alpha+1} K}{x^\alpha \alpha^2} e^{-\alpha x}. \end{aligned}$$

Aber für  $x \geq M$  wird dieser letzte Ausdruck  $< 2\varepsilon \frac{e^{-x}}{x^3}$ . Zusammen mit (36) ist damit die Behauptung des Lemmas 2 bewiesen.

Nunmehr kommen wir rasch zum Ziel unserer Überlegungen. Aus Lemma 2 folgt sofort, daß

$$v(x) \sim \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-x}}{x} \right) \quad (41)$$

für  $x \rightarrow \infty$  gilt, womit auch gezeigt ist, daß  $v(x)$  für  $x > 0$  nicht identisch verschwindet. Aus (29) folgt aber dann ohne Schwierigkeit, daß auch

$$y(x) \sim \frac{e^{-x}}{x}$$

für  $x \rightarrow \infty$  gilt und damit ist alles bewiesen.

Wir merken noch an, daß man die Bedingung (11) z. B. zu

$$f(v) = v + O \left[ |v| \left( \log \frac{1}{|v|} \right)^{-\beta} \right]$$

mit geeignetem  $\beta > 0$  verschärfen könnte. Der Beweis des Lemmas 2 kann fast ohne Modifikationen auf diesen Fall übertragen werden.

(Eingegangen am 22. Februar 1956)

(Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik)

## Zum gegenwärtigen Stand der numerischen Wettervorhersage

Von H. Reuter, Wien

**Zusammenfassung.** Die theoretischen Untersuchungen der letzten Jahre mit dem Ziel, die Wettervorhersage auf eine exakte mathematische Grundlage zu stellen, befaßten sich neben einzelnen Vorausberechnungen von (strahlungsbedingten) Temperaturänderungen in praktisch unbewegter Luft (statisches Problem) vornehmlich mit denjenigen Prozessen in einer reibungslosen, trockenen Atmosphäre, die adiabatisch verlaufen. Es werden die Grunddifferentialgleichungen für dieses Teilproblem der atmosphärischen Dynamik aufgestellt und die bisher vorgeschlagenen bzw. durchgeführten Lösungsversuche umrissen. Da die vollständigen Differentialgleichungen neben den wetterprognostisch (synoptisch) wichtigen, großräumigen und relativ langsam verlaufenden Prozessen der Verlagerung und Entwicklung von Druckgebilden auch noch kurzperiodische Gravitations- und Trägheitswellen zulassen, die jedoch für Prognosenzwecke von untergeordneter Bedeutung sind, konzentriert sich das Hauptinteresse der Theoretiker auf die Anbringung sogenannter „Filterbedingungen“ an den Differentialgleichungen, die diesen „meteorologischen Lärm“ eliminieren. Dies ist nämlich schon deshalb erforderlich, weil sonst bei der numerischen Integration zur Wahrung der numerischen Stabilität der Lösung bis zu Zeitschritten von 5 bis 10 Minuten heruntergegangen werden müßte, was auch bei Einsatz von modernsten elektronischen Rechenmaschinen ein zu zeitraubendes Unterfangen wäre. Die erste



vorgeschlagene „Filterbedingung“, die sogenannte geostrophische Approximation, hat sich als zu weitgehend und im Widerspruch mit physikalischen Prinzipien herausgestellt.

Wenngleich der theoretischen Meteorologie seit jeher eine besondere Rolle im Rahmen der gesamten meteorologischen Forschung zugekommen ist, da sie die wichtige Verbindung zwischen rein deskriptiver Meteorologie und Physik der Atmosphäre herstellte, waren die theoretischen Ergebnisse im Problemkomplex der eigentlichen Wettervorhersage lange Zeit hindurch äußerst spärlich. Erst in jüngster Zeit stellten sich auch in diesem so ungeheuer schwierigen Gebiet gewisse Erfolge ein, die das ersehnte Ziel, zumindestens Teilprobleme der Wettervorhersage auf eine exakte mathematische Grundlage zu stellen, in greifbare Nähe gerückt erscheinen lassen, zumal die äußerst zeitraubenden numerischen Rechenverfahren mit Hilfe moderner elektronischer Rechenmaschinen in beachtlich kurzer Zeit durchgeführt werden konnten. Wir begegnen hier bereits dem ersten Grundproblem der numerischen Wettervorhersage, nämlich dem „Zeitproblem“, das darin besteht, daß uns bei gegebenen Anfangsbedingungen die Zeit vorgeschrieben ist, die zur Vorausberechnung gewisser meteorologischer Größen zur Verfügung steht, soll dieselbe prognostischen Wert besitzen, da sonst gewissermaßen die Natur die Gleichungen rascher integriert. Die Umgebung dieser Schwierigkeit, etwa durch Einbeziehung der Vorgänge in der gesamten Lufthülle unseres Planeten inklusive der (bekannten) äußeren Energiezufuhr durch die (periodische) Sonnenstrahlung scheitert an der allzu großen Kompliziertheit des Problems und an den derzeit noch sehr mangelhaften Beobachtungen in manchen Teilen der Erdoberfläche, obwohl eine prinzipielle mathematische Formulierung denkbar wäre. Man begnügt sich daher vorerst damit, entweder rein statistische Vorgänge bei variabler Energiezufuhr oder dynamische bei Annahme adiabatischer Prozesse zu behandeln. Zu den ersten Problemen gehören vor allem die Rechnungen zu dem sogenannten solaren Klima, die Untersuchungen über die Absorption und Zerstreuung in der Atmosphäre oder allgemein über den Wärme- und Strahlungshaushalt der Atmosphäre und der Erdoberfläche. Wegen der in den meisten Teilen der Erdatmosphäre jedoch überwiegend dynamischen Vorgänge kommt diesen Rechnungen nur eine untergeordnete prognostische Bedeutung zu. Trotzdem lassen sich solcherart bei bestimmten Wetterlagen Vorausberechnungen der zu erwartenden (strahlungsbedingten) Temperaturänderungen durchführen, wie sie vor allem von Brunt<sup>1</sup>, Reuter<sup>2</sup>, Gold<sup>3</sup>, Neiburger<sup>4</sup>, Reuter und Knizek<sup>5</sup> für die Vorhersage der Minimum- und Maximumtemperatur an „Strahlungstagen“, das heißt windschwachen, gering bewölkten Tagen, angegeben wurden.

Wesentlich größere Bedeutung kommt jedoch dem zweiten Teilproblem, nämlich dem dynamischer, adiabatischer Vorgänge, zu, speziell im Hinblick auf die großräumigen Änderungen der Luftdruckverteilung in der freien Atmosphäre (oberhalb der sogenannten Reibungsschicht), die für kürzere Zeiträume (ein bis drei Tage) in vielen Fällen als adiabatische Abläufe anzusehen sind. Die (äußere) Wärmezufuhr durch die Sonneneinstrahlung (nur diese kommt als Energiequelle ernsthaft in Frage), also die nichtadiabatischen Prozesse, können tatsächlich für die Mehrzahl der im Druck- und Windfeld stattfindenden Entwicklungen vernachlässigt werden. Sie

<sup>1</sup> D. Brunt: *Physical and Dynamical Meteorology*. Cambridge: University Press. 1944.

<sup>2</sup> H. Reuter: *Forecasting minimum temperatures*. *Tellus* **3**, 141—147 (1951).

<sup>3</sup> E. Gold: *Maximum day temperatures and the Tephigram*. *Met. Office Prof. Notes*, **63**, London (1933).

<sup>4</sup> M. Neiburger: *Insolation and the prediction of maximum temperatures*. *Bull. Amer. Met. Soc.* **22**, 95—102 (1941).

<sup>5</sup> F. Knizek und H. Reuter: *Über den Wärmehaushalt der unteren Luftschichten an heiteren Tagen und die Prognose der Maximumtemperatur*. *Arch. Met. Geophys. u. Bioklim*, Ser. A (erscheint 1956).

schöpfen ihre Energie aus der im Anfangszustand aufgespeicherten potentiellen Energie. Die Energiezufuhr von der durch die Sonnenstrahlung erwärmten Erdoberfläche ist in kürzeren Zeiträumen gering, da die sich nachts umkehrende Strahlungsbilanz den Tagesgewinn meist wieder abgibt. Eine besondere Rolle spielt allerdings die Zufuhr von Energie auf dem Wege über die Wasserverdunstung in Form von Kondensationswärme beim Wolkenbildungsprozeß. Dieser Beitrag dürfte nach neueren Untersuchungen (s. vor allem Kleinschmidt<sup>6</sup>) in manchen Fällen eine große Rolle spielen.

Als derzeit vordringlichstes „Teilproblem“ der numerischen Wettervorhersage wird demnach die Vorausberechnung der drei Windkomponenten und der Druckverteilung für einen gegebenen Anfangszustand über einem größeren Teil der Erdoberfläche (für einen Zeitraum von 1 bis 3 Tagen) angesehen, wobei die „Modellatmosphäre“ als reibungslos und trocken vorausgesetzt wird und gemäß den obigen Ausführungen nichtadiabatische Prozesse vernachlässigt werden. Das verbleibende Problem ist trotzdem noch ganz außerordentlich kompliziert und gegenwärtig noch nicht befriedigend gelöst, obwohl in den letzten Jahren beachtliche Fortschritte erzielt werden konnten. Wir wollen im folgenden kurz berichten, wie weit man bisher gelangt ist und vor welchen Schwierigkeiten und noch ungelösten Problemen wir derzeit stehen.

Um das Problem mathematisch zu formulieren, müssen wir die atmosphärischen Grunddifferentialgleichungen zusammenstellen. Als Koordinatensystem verwenden wir ein fix mit der Erdoberfläche verbundenes kartesisches, dessen  $x$ -Achse nach Osten,  $y$ -Achse nach Norden und  $z$ -Achse zum Zenith weist. Die Bewegungsgleichungen schreiben sich dann bei Vernachlässigung der Reibung unter Berücksichtigung der (nur in der  $z$ -Richtung wirksamen) Gravitationskraft der Erde zu:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} - f v + l w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} + f u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} - l u + g &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\quad (1)$$

Hierin sind  $u, v, w$  die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $v$ ,  $f = 2 \Omega \sin \varphi$  und  $l = 2 \Omega \cos \varphi$  die Coriolis-Parameter ( $\Omega$  Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation,  $\varphi$  geographische Breite),  $\rho$  die Luftdichte,  $p$  der Luftdruck,  $g$  die Gravitationsbeschleunigung und  $t$  die Zeit.

Für meteorologische Probleme können die Gl. (1) vereinfacht werden. In der ersten Gleichung kann  $l w$ , in der dritten  $l u$  und  $dw/dt$  gegenüber den anderen Gliedern vernachlässigt werden. Dadurch geht die letzte Gleichung in die statische Grundgleichung über und die verbleibenden Gleichungen werden als quasi-statische bezeichnet. Weiters kann nunmehr eine Transformation derselben durchgeführt werden, die sich als sehr vorteilhaft erweist, indem nämlich der Druck  $p$  an Stelle von  $z$  als vertikale Koordinate eingeführt wird, so daß also  $p$  und  $z$  ihre Rollen als abhängige und unabhängige Variable vertauschen (s. Reuter<sup>7</sup>). In diesem  $(x, y, p, t)$ -System lauten dann die Gl. (1) nach Euler-Zerlegung der substantiellen Beschleunigungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla u + \omega \frac{\partial u}{\partial p} - f v &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla v + \omega \frac{\partial v}{\partial p} + f u &= -\frac{\partial H}{\partial y},\end{aligned}\quad (2)$$

<sup>6</sup> E. Kleinschmidt jun.: Über Aufbau und Entstehung von Zyklonen. Meteor. Rdsch. 3, 54 (1950).

<sup>7</sup> H. Reuter: Methoden und Probleme der Wettervorhersage. Wien: Springer-Verlag. 1954.



$$\frac{1}{\varrho} = - \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (2a)$$

Dabei sind hier die Komponenten  $u, v$  als diejenigen eines zweidimensionalen Vektors  $\mathbf{v}_2$  auf einer  $p$ -Fläche zu verstehen. Ferner ist  $\omega = dp/dt$  die sogenannte generalisierte Vertikalgeschwindigkeit und  $H = gz$  das Geopotential.

Zu den Gl. (2) tritt als weitere die Kontinuitätsgleichung. Sie lautet im  $(x, y, p, t)$ -System (s. Reuter<sup>7</sup>):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (3)$$

Damit ist das hydrodynamische Problem formuliert und zusätzliche Gleichungen liefert die Thermodynamik. Wir benötigen die Zustandsgleichung der Gase (die Atmosphäre wird als ideales Gas angesehen) und den ersten Hauptsatz der Wärmelehre in Form der Adiabatangleichung. Denselben schreiben wir

$$0 = \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\varrho c_p} \frac{dp}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{R}{c_p p} T \omega = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla T - \frac{p}{R} \omega \sigma$$

mit  $\sigma \equiv \frac{R}{p^2} \left( \frac{R}{c_p} T - p \frac{\partial T}{\partial p} \right)$  (4)

mit  $c_p$  als spezifischer Wärme der Luft bei konstantem Druck und  $\sigma$  als sogenannter Stabilität. Unter Verwendung der statischen Grundgleichung (2a) wird mit der Zustandsgleichung der Gase:

$$\frac{1}{\varrho} = - \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{R}{p} T, \quad (5)$$

so daß (4) in die Form

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial t} + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla \frac{\partial H}{\partial p} + \sigma \omega = 0, \text{ mit } \sigma \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} + \frac{1}{\kappa p} \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (4a)$$

übergeht, wenn für die Gaskonstante  $R = c_p - c_v$  ( $c_v$  spezifische Wärme bei konstantem Volumen) gesetzt wird und  $\kappa = c_p/c_v$  bedeutet. Die Gl. (2), (3) und (4a) bestimmen vollständig das Problem, das wir uns gestellt haben, nämlich die Vorgänge in einer trockenen reibungslosen Atmosphäre bei Vernachlässigung der äußeren Wärmezufuhr zu untersuchen, wenn noch die Randbedingungen gegeben sind. Es sind vier Gleichungen für die vier unbekannten Funktionen  $u, v, w$  und  $H$  der unabhängigen Variablen  $x, y, p$  und  $t$  vorhanden. Die Randbedingungen werden folgendermaßen formuliert: Für die obere Grenze der Atmosphäre, also für

$$p = 0 \text{ gilt } (\omega)^0 = 0. \quad (6)$$

Für die untere Begrenzung durch die Erdoberfläche wird zunächst im  $z$ -System

$$v_n (p = p_0) = (v_n)_0 = 0, \quad (7a)$$

da die Strömung die Erdoberfläche nicht durchsetzen kann.  $v_n$  bedeutet hier die Normalkomponente des Geschwindigkeitsvektors. Da wir im  $p$ -System arbeiten, müssen wir die Bedingung (7a) anders formulieren. Bezeichnen wir mit

$$F = gz - h(x, y) = 0$$

die Topographie der Erdoberfläche, so ist  $(\mathbf{v}_3 \cdot \nabla F)_0 = 0$  (im  $z$ -System) mit der Bedingung (7a) gleichwertig und man erhält daraus

$$(g w - \mathbf{v}_2 \cdot \nabla h)_0 = 0 \quad (7)$$

oder

$$\left( \frac{dH}{dt} \right)_0 = (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla h)_0. \quad (7)$$

An Stelle der Randbedingung (7) wird häufig auch näherungsweise die im  $p$ -System einfachere

$$p = p_0, \quad (\omega)_0 = 0 \quad (8)$$

verwendet.



Da die zu lösenden Gleichungen nichtlinear sind, ist es aussichtslos, eine allgemeine Lösung des Systems, das Anfangsbedingungen als willkürliche Funktionen enthält, analytisch herzuleiten. Es bleiben zwei Möglichkeiten, um zu einer Lösung zu gelangen, nämlich erstens Linearisierung und zweitens numerische Integration. Beide Wege sind beschritten worden. Es zeigte sich, daß die Linearisierung mitunter wesentliche Eigenschaften atmosphärischer Prozesse unterdrückt. Für praktische (prognostische) Zwecke bleibt daher nur die numerische Integration übrig. Dabei werden nicht die Zustandsvariablen selbst, sondern ihre Ableitungen als abhängige Variable betrachtet. Es ist dann möglich, da die Gleichungen in den Tendenzen  $\partial u/\partial t$  usw. wesentlich einfacher als in den Variablen selbst sind, diese als Funktionen anzuschreiben, die zur Zeit  $t = t_0$  nur von den räumlichen Ableitungen abhängen. Allerdings steht die Kontinuitätsgleichung als Verträglichkeitsbedingung einer willkürlichen Vorgabe von  $\omega$  zur Zeit  $t_0$  entgegen, so daß dieses zuerst durch Integration über die vertikale Luftsäule, also

$$\omega = - \int_0^p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dp \quad (9)$$

bestimmt werden muß. Die Tendenz des Geopotentials  $\partial H/\partial t$  läßt sich aus der Adiabatangleichung (4a) gleichfalls durch Integration über  $p$  zur Zeit  $t_0$  ermitteln. Nach Vorliegen numerischer Lösungen für die Tendenzen werden die Differentialquotienten  $\partial u/\partial t$  usw. durch Differenzenquotienten ersetzt und auf diese Weise der Zustand nach Ablauf des Zeitintervalls  $\Delta t$  berechnet. Durch iterative Anwendung dieses Differenzenverfahrens auf die Variablen zur Zeit  $t_0 + \Delta t$  gewinnt man Lösungen für den Zeitpunkt  $t_0 + 2 \Delta t$  usw. Da man jedoch gezwungen ist, schon beim ersten Schritt auch die räumlichen Differentialquotienten unter Einführung eines endlichen räumlichen Maschennetzes  $\Delta x, \Delta y, \Delta p$  durch Differenzenquotienten anzunähern, muß das Differenzenverfahren numerisch stabil sein, das heißt bei allmählicher Verkleinerung der (endlichen) Inkremente bis zur Grenze Null gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergieren. Um das zu gewährleisten, müssen die von Courant-Fridrichs-Lewy aufgestellten Stabilitätskriterien erfüllt sein.

Man hat nun untersucht, bis zu welchen Zeitschritten man bei direkter numerischer Integration der oben angegebenen vier Gleichungen heruntergehen müßte, um bei den durch die Beobachtungen vorgegebenen räumlichen Inkrementen die numerische Stabilität zu wahren. Dabei zeigte sich, daß Zeitinkremente von der Größenordnung 5 bis 10 Minuten erforderlich wären. Dies hat seinen Grund darin, daß die verwendeten Gleichungen neben den großräumigen für den Wetterablauf maßgeblichen Vorgängen auch noch kurzperiodische Schwingungen in Form von Gravitations- und Trägheitswellen zulassen, die für die meteorologisch wichtige Lösung jedoch von geringem Interesse sind. Diese sogenannten „Lärmprozesse“ (meteorological noise) sind letzten Endes die Ursache, warum eine direkte numerische Integration, wie sie eben beschrieben wurde, bisher nicht durchgeführt wurde, da bei der Kleinheit der Zeitinkremente  $\Delta t$  auch bei Zuhilfenahme moderner elektronischer Rechenmaschinen das Arbeitspensum für eine 24- bis 48stündige Prognose nicht in der erforderlichen Zeit bewältigt werden könnte<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> Mit Ausnahme von L. F. Richardson<sup>9</sup>, der das eben geschilderte Verfahren erstmalig vorschlug, dessen diesbezüglichen Rechnungen jedoch numerisch instabil waren, ist in der Theorie der numerischen Wettervorhersage für praktische Zwecke der Weg bislang nicht beschritten worden.

<sup>9</sup> L. F. Richardson: Weather prediction by numerical processes. Cambridge: University Press. 1922.

Man hat sich in den letzten Jahren vielmehr damit beschäftigt, die Lärmprozesse aus den Gleichungen zu eliminieren, um dann mit Berechtigung ein zulässiges Zeitinkrement von der Größenordnung 1 bis 2 Stunden zu verwenden. Allerdings ist es bis heute noch nicht gelungen, solche in jeder Weise befriedigende „Filterbedingungen“ für die Lärmprozesse zu finden, so daß auch derzeit noch dieses Problem als vordringlichstes der numerischen Wettervorhersage anzusehen ist. Wir werden im folgenden einen kurzen Überblick über die bisher erreichten diesbezüglichen Erfolge geben.

Einen ersten Hinweis, auf welche Weise Filter zu finden sind, die meteorologisch zweitrangige Bewegungsvorgänge aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen herausfiltern, gibt die Natur selbst. Es ist überhaupt ein Lichtblick in den schier unüberwindlichen Schwierigkeiten, die sich dem Problem der mathematischen Wettervorhersage entgegenstellen, daß wir gewissermaßen täglich Lösungen der Gleichungen an Hand der Beobachtungstatsachen vorgeführt bekommen. Dabei zeigte sich nun folgendes: Die in den meisten Fällen auftretenden tatsächlichen substantiellen Beschleunigungen  $du/dt$  bzw.  $dv/dt$  sind (zumindestens in mittleren und hohen Breiten) klein gegenüber den Coriolis-Beschleunigungen  $f \cdot v$  bzw.  $f \cdot u$ . Mit anderen Worten: Die wirklichen Windkomponenten  $u$ ,  $v$  weichen nur wenig von den durch folgende Gleichung definierten sogenannten geostrophischen Windkomponenten ab.

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial y}, \\ v_g &= \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \quad (10)$$

Philipps<sup>10</sup> kam daher auf den Gedanken, den (zweidimensionalen) geostrophischen Wind  $v_g(u_g, v_g)$  gewissermaßen als erste Näherungslösung der Bewegungsgleichungen aufzufassen. Zwecks Gewinnung weiterer Näherungen werden zunächst die Beschleunigungen geostrophisch approximiert, das heißt  $du/dt$  und  $dv/dt$  durch  $du_g/dt$  bzw.  $dv_g/dt$  ersetzt. Dann liefern die Gl. (2) eine zweite Näherung  $v_{II}(u_2, v_2)$ , die nun ihrerseits zur Approximation der Beschleunigungsterme verwendet wird und so fort. Man kann sich überzeugen, daß dieses Verfahren konvergiert, solange der Coriolis-Parameter nicht zu klein wird. Natürlich ist es im Einzelfall recht umständlich, die Lösung auf Grund der Philippschen Reihe auszurechnen. Jedoch zeigte sich, daß gerade für die uns interessierenden großräumigen Vorgänge das Verfahren rascher konvergiert, somit durch sukzessive geostrophische Approximation die gewünschte Filterbedingung zu erreichen ist. Die Genauigkeit solcher Approximationen der horizontalen Windkomponenten wurde von Hollmann und Reuter<sup>11</sup> untersucht. Wie Charney<sup>12</sup> und Hinkelmann<sup>13</sup> zeigen konnten, wird bereits durch die zweite Näherung der geostrophischen Approximation der Großteil des „meteorologischen Lärmes“ eliminiert. Man hat derartige Untersuchungen nicht an den Bewegungsgleichungen (2) selbst vorgenommen, sondern aus denselben nach einem Vorschlag von Rossby<sup>14</sup> durch kreuzweise Differentiation und Subtraktion der ersten Gleichung

<sup>10</sup> H. Philipps: Die Abweichung vom geostrophischen Wind. Meteorol. Z. 56, 460—483 (1939).

<sup>11</sup> G. Hollmann und H. Reuter: Über die Genauigkeit verschiedener Approximationen der horizontalen Windkomponenten. Tellus 5, 403—412 (1953).

<sup>12</sup> J. Charney: On the scale of atmospheric motion. Geof. Publ. 17, 17ff. (1948).

<sup>13</sup> K. Hinkelmann: Über den Mechanismus des meteorologischen Lärmes. Tellus 3, 285 bis 296 (1951).

<sup>14</sup> C. G. Rossby: Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of semipermanent centers of action. J. Mar. Res. 2, 38—55 (1939).



von der zweiten die sogenannte Vorticitygleichung (Wirbelgleichung) abgeleitet, die

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla \eta + \omega \frac{\partial \eta}{\partial p} = -\eta \nabla \cdot \mathbf{v}_2 - \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right)$$

mit  $\eta \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f$  (11)

lautet.  $\eta$  ist hier die sogenannte absolute Vorticity (Wirbelgröße), das heißt, die doppelte Drehgeschwindigkeit um eine vertikale Achse (bzw. eine Achse normal zur  $p$ -Fläche) oder Vertikalkomponente des Rotorvektors der Geschwindigkeit vermehrt um die entsprechende Komponente der Erdrotation. In der Gl. (11) können die Komponenten  $u$  und  $v$  geostrophisch approximiert werden, dann erhält man im wesentlichen dasselbe Ergebnis, wie wenn in der Philippschen Reihe nach dem zweiten Glied abgebrochen wird. Man muß dabei allerdings bedenken, daß der Coriolis-Parameter  $f = 2 \Omega \sin \varphi$  in der Nord-Süd-, das heißt in der  $y$ -Richtung variiert. Man nimmt näherungsweise eine lineare Abhängigkeit  $f = f_0 + \beta y$  an. Dann erhält man mit einigen kleinen Vernachlässigungen die folgende geostrophisch approximierte Vorticitygleichung:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 H - \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 H + \beta \frac{\partial H}{\partial x} = \\ = -\eta_g \nabla \cdot \mathbf{v}_g - \omega \frac{\partial \eta_g}{\partial p} - \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v_g}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u_g}{\partial p} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Es gibt nun einen Idealfall, nämlich den, bei welchem die Windrichtung und -geschwindigkeit mit der Höhe (das heißt mit abnehmendem Druck) nur wenig variiert, wo die rechte Seite von (12) praktisch verschwindet<sup>15</sup>. Nun ist es eine durch Beobachtungen erhärtete Tatsache, daß für die ganz großräumigen Druckzentren, die sogenannten Steuerungszentren, dies innerhalb gewisser Grenzen zutrifft. Für die mathematische Erfassung dieser Prozesse wird daher bereits die Gleichung

$$\nabla^2 \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 H - \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 H + \beta \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (12a)$$

verantwortlich sein. Tatsächlich bildete sie den Ausgangspunkt für die ersten Versuche der numerischen Wettervorhersage. Nachdem Rossby<sup>14</sup> eine Lösung durch Linearisierung gefunden hatte und auch partikuläre Lösungen der nichtlinearen Gleichung von verschiedenen Autoren angegeben worden waren, wurde die Gl. (12a) erstmalig im Jahre 1950 in Princeton am Institute for Advanced Study von Charney, Fjörtoft und v. Neumann<sup>16</sup> numerisch integriert, und zwar für eine durch tatsächliche Beobachtungen in der freien Atmosphäre (auf der 500-mb-Fläche, das ist in etwa 5000 m Höhe) gegebene Anfangsverteilung. Seitdem sind diese Versuche häufig wiederholt und die Rechentechnik sehr verbessert worden, so daß derartige Integrationen für ein Gebiet von der Größe Europas in erstaunlich kurzer Zeit bewältigt werden konnten. Bei Zeitschritten von der Größe von zwei Stunden benötigte man zu einer 24stündigen Vorausberechnung nicht viel mehr als eine halbe Stunde. Natürlich ist die Programmierung der Rechenmaschine ein Problem für sich, das von der Konstruktion der Maschine abhängt. Auf die Technik der eigentlichen numerischen Integration kann hier nicht eingegangen werden.

So ermutigend diese ersten numerischen Berechnungen auf Grund der Gl. (12a) auch waren, sie konnten damit nur ein sehr spezielles Teilproblem des eingangs formulierten (gegenüber den natürlichen Verhältnissen noch immer vereinfachten)

<sup>15</sup> Der erste Term rechts  $-\eta_g \nabla \cdot \mathbf{v}_g$  ist praktisch Null.

<sup>16</sup> J. Charney, R. Fjörtoft and J. v. Neumann: Numerical integration of the barotropic vorticity equation. Tellus 2, 237—254 (1950).



Problems der in einer reibungslosen Atmosphäre stattfindenden adiabatischen Prozesse behandeln. Wir haben nämlich bisher (wegen Vernachlässigung der in der Vertikalen auftretenden Änderungen der Strömungszustände) weder von der Kontinuitätsgleichung (3) noch von der Adiabatengleichung (4a) Gebrauch machen müssen. Will man dies auf dem hier beschrittenen Weg tun, so dürfen die Terme auf der rechten Seite der Gl. (11) nicht gestrichen werden. Man hat daher folgenden Weg eingeschlagen: Der erste Term auf der rechten Seite von (11)  $-\eta \nabla \cdot \mathbf{v}_2$  wird durch  $-f \nabla \cdot \mathbf{v}_2$  angenähert. Dies ist, wie die Erfahrung zeigt, in mittleren und hohen Breiten bei den in der Praxis vorkommenden Krümmungen und Scherungen meist erlaubt. Dann läßt sich dafür aus der Kontinuitätsgleichung (3)  $f \partial \omega / \partial p$  schreiben und wir erhalten an Stelle von (11):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla \eta = f \frac{\partial \omega}{\partial p} - \omega \frac{\partial \eta}{\partial p} - \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right). \quad (11a)$$

Nunmehr werden die beiden letzten Terme auf der rechten Seite von (11a) gestrichen. Dies scheint eine sehr einschneidende Vereinfachung zu sein, doch wird sie durch gewisse Erfahrungen nahegelegt, wenngleich im einzelnen das Verhalten noch zu klären wäre. Des weiteren wird dann die linke Seite von (11a) in der gleichen Weise, wie dies früher geschehen ist, geostrophisch approximiert, so daß wir folgende Bestimmungsgleichung für die Unbekannten  $H$  und  $\omega$  erhalten:

$$\nabla^2 \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 H - \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 H + \beta \frac{\partial H}{\partial x} = f^2 \frac{\partial \omega}{\partial p}. \quad (13)$$

Nehmen wir jetzt als zweite Bestimmungsgleichung die Adiabatengleichung (4a), so ist es möglich,  $\omega$  zu eliminieren und eine Gleichung für die Variable  $\partial H / \partial t$  herzuleiten. In der Adiabatengleichung (4a) wird  $\mathbf{v}_2$  natürlich auch geostrophisch approximiert. Zur vereinfachten Schreibweise benützen wir den sogenannten Jakobi-Operator, der definitionsgemäß

$$J(g, h) \equiv \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)} \equiv \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y}$$

als Abkürzung für die Funktionaldeterminante zweier abhängiger Variabler eingeführt wird. Damit schreibt sich die aus (13) und der geostrophisch approximierten Gl. (4a) nach der Eliminierung von  $\omega$  gewonnene Gleichung zu:

$$\nabla^2 \frac{\partial H}{\partial t} + f^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial t} \right) = - \frac{1}{f} J(H, \nabla^2 H) - \beta \frac{\partial H}{\partial x} - f \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{1}{\sigma} J \left( H, \frac{\partial H}{\partial p} \right) \right]. \quad (14)$$

Diese Gleichung bildet die Grundlage für die in den letzten Jahren durchgeführten Rechnungen zur numerischen Wettervorhersage. Sie ist in der Variablen  $\partial H / \partial t$  eine dreidimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung und für  $\sigma > 0$  vom elliptischen Typ.

Da der dreidimensionale Lösungsprozeß sehr umständlich ist und bei Anwendung von Iterationsverfahren nur sehr langsam konvergiert, hat man versucht, durch weitere „Modellannahmen“ verhältnismäßig rasch zu einer Lösung zu kommen. Dies geschieht derart, daß man von vornherein über die Funktion  $H$  gewisse (durch Beobachtungsergebnisse nahegelegte Voraussetzungen) trifft, etwa in der Form:

$$H(x, y, p, t) = P_1(p) \varphi_1(x, y, t) + P_2(p) \varrho_2(x, y, t). \quad (15)$$

Weiters wird meistens angenommen, daß die Stabilität  $\sigma$  nur eine Funktion von  $p$  sei, die empirisch zu ermitteln wäre u. dgl. mehr. Auf alle Fälle ist verständlich, daß die Lösung auf erhebliche Schwierigkeiten stößt, woraus die ungeheure Kompliziertheit der atmosphärischen Prozesse ersichtlich wird. Es sind bisher eine ganze Reihe verschiedener Lösungen der Gl. (14) mit verschiedenen zusätzlichen Annahmen (15) veröffentlicht und für numerische Integration mittels elektronischer Maschinen vor-

geschlagen und auch durchgeführt worden. Es sind dies die sogenannten „Modelle“ von Eady<sup>17</sup>, Sawyer und Bushby<sup>18</sup>, Eliassen<sup>19</sup>, Charney und Philipps<sup>20</sup> und Hinkelmann<sup>21</sup> und andere mehr. Mit einigen dieser Lösungsprozesse wurden und werden auch schon mehr oder weniger regelmäßige Vorausberechnungen der Strömungsverhältnisse in zwei bis drei Schichten der Atmosphäre durchgeführt. Die Ergebnisse sind nur zum Teil als befriedigend zu bezeichnen. Man hat sich daher in allerletzter Zeit die Frage gestellt, ob mit den getroffenen Vereinfachungen nicht zu unrealistische Annahmen getroffen wurden. Dabei zeigte sich, daß offenbar die geostrophische Approximation, wie sie in der oben geschilderten Weise durchgeführt wurde, zwar die Lärmprozesse eliminiert, aber andererseits den großräumigen, wettermäßig wichtigen Vorgängen, wie Entwicklung von Tiefdruckgebieten und Verlagerung der (großräumigen) Druckwellen, doch gewisse unrealistische Schranken auferlegt. Man gelangt hier sogar bei einer eingehenden Analyse des Mechanismus der geostrophischen Approximation zu dem Ergebnis, daß die Gl. (14) in mancher Hinsicht im Widerspruch zum Energieprinzip steht. Der Beweis dafür würde den Rahmen dieses Artikels überschreiten. Es sei zum Schluß nur bemerkt, daß es mithin derzeit das vordringlichste Problem der numerischen Wettervorhersage ist, eine andere Filterbedingung als die geostrophische Approximation zu finden. Einige diesbezügliche Ansätze sind schon veröffentlicht worden (Hollmann<sup>22</sup>). Doch ist es noch zu früh, über deren Brauchbarkeit ein abschließendes Urteil abzugeben.

<sup>17</sup> E. T. Eady: Note on weather computing and the so called  $2\frac{1}{2}$  dimensional model. *Tellus* 4, 157—167 (1952).

<sup>18</sup> J. S. Sawyer and F. H. Bushby: A baroclinic model atmosphere suitable for numerical integration. *J. of Met.* 10, 54—59 (1953).

<sup>19</sup> A. Eliassen: Simplified model of the atmosphere designed for the purpose of numerical weather prediction. *Tellus* 4, 147—156 (1952).

<sup>20</sup> J. Charney and N. A. Phillips: Numerical integration of quasi-geostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flow. *J. of Met.* 10, 71—79 (1953).

<sup>21</sup> K. Hinkelmann: Zur numerischen Wettervorhersage mittels Relaxationsmethode unter Einbeziehung barokliner Effekte. I und II. *Tellus* 5, 251—259 und 499—512 (1953).

<sup>22</sup> G. Hollmann: Eine neue Methode zur approximativen Lösung barokliner Prognoseprobleme. *Meteor. Rdsch.* 8, 42—44 (1955). — Über die Behandlung barokliner Prognoseprobleme mit Hilfe nichtgeostrophischer Gleichungen. *Meteor. Rdsch.* 8, 74—78 (1955).

(Eingegangen am 14. Februar 1956)

## Neue Wege der modernen Risikotheorie

Von J. Rybarz, Wien

Mit 1 Textabbildung

**Zusammenfassung.** Die moderne Risikotheorie knüpft an das alte Problem vom Ruin des Spielers an. Auf Grund eines von B. de Finetti stammenden Theorems ist es möglich, die Wahrscheinlichkeit dafür abzuschätzen, daß ein Spieler im Verlauf einer unendlichen Folge von Spielen ruiniert wird. Auch für die Versicherungstechnik ist dieses Theorem von größter Bedeutung.

Die großartige Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den letzten Jahrzehnten, insbesondere aber die in der Lehre von den Zufallsvariablen und den stochastischen Prozessen gewonnenen Erkenntnisse, haben auch in der Versicherungsmathematik ihren Widerhall gefunden. Insbesondere die theoretische Grundlage aller Versicherungstechnik, nämlich die Risikotheorie, hat aus dieser Entwicklung Nutzen gezogen.

Es wurden verschiedene Versuche unternommen, die neuen Gedankengänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Risikotheorie anzuwenden (etwa von Lund-

berg, Cramér u. a.). Hier soll über eine Theorie berichtet werden, die von Finetti<sup>1</sup> begründet und von Baudez<sup>2</sup> und Dubourdieu<sup>3</sup> weiter ausgebaut wurde.

Die im folgenden benötigten einfachsten Begriffe aus der Theorie der Zufallsvariablen sollen zunächst kurz in Erinnerung gebracht werden.

Es sei  $X$  eine reelle Zufallsvariable, die Werte aus einem bestimmten endlichen Intervall annehmen kann. Unter der Verteilungsfunktion von  $X$ , auch Wahrscheinlichkeitsfunktion genannt, versteht man eine Funktion  $F(x)$ , die zu jedem reellen  $x$  die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Ungleichung  $X < x$  angibt, in Zeichen:

$$F(x) = W\{X < x\}. \quad (1)$$

$F(x)$  ist eine monotone, und zwar nicht abnehmende, Funktion, und es gilt:

$$F(-\infty) = 0; \quad F(\infty) = 1, \quad (2)$$

und demnach auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1, \quad (3)$$

wobei das Integral im Stieltjesschen Sinne zu verstehen ist. (Dies gilt auch von allen folgenden Integralen.)

Ist  $g(X)$  eine beliebige Funktion von  $X$ , so versteht man unter dem Erwartungswert  $E(g)$  dieser Funktion den Ausdruck:

$$E(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot dF(x). \quad (4)$$

Speziell ist

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF(x). \quad (5)$$

Unter der „charakteristischen Funktion von  $X$ “ versteht man die folgendermaßen definierte Funktion  $f(t)$  eines reellen Parameters  $t$ :

$$f(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot dF(x). \quad (6)$$

Ableitung der charakteristischen Funktion nach dem Parameter  $t$  ergibt:

$$f'(t) = E(X \cdot e^{tX}); \quad f''(t) = E(X^2 \cdot e^{tX}) > 0. \quad (7)$$

Aus der zweiten Gl. (7) folgt, daß die Kurve  $u = f(t)$  überall konkav nach oben ist.

Für  $t = 0$  erhält man:

$$f(0) = E(1) = 1; \quad f'(0) = E(X). \quad (8)$$

Nach diesen einleitenden Bemerkungen sei nunmehr  $A$  ein Spieler, der mit einem zweiten Spieler  $B$  ein Spiel spielt, dessen Ausgang vom Zufall abhängig sei. Es soll verschiedene Möglichkeiten (natürlich aber mindestens zwei) für den Ausgang des Spieles geben.  $A$  sei verpflichtet, nach Durchführung des Spieles eine allgemein mit  $X$  bezeichnete Zahlung zu leisten, deren Höhe vom Spielausgang abhängig ist. Dann ist  $X$  eine Zufallsvariable; ihre Verteilungsfunktion  $F(x)$  darf als auf Grund der Spielbedingungen bekannt vorausgesetzt werden.

<sup>1</sup> B. de Finetti: La teoria del rischio e il problema della rovina dei giocatori. (Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, anno X, nos 1—2, 1939, Roma).  
Il Problema dei „pieni“. (Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, anno XI, no 1, 1940, Roma.)

<sup>2</sup> Gaston Baudez: Le plein dans les Compagnies d'assurance. Application aucas particulier des assurances sur la vie. (Librairie Dulac, Paris, 1941.)

<sup>3</sup> J. Dubourdieu: Théorie mathématique des assurances, Fascicule 1. (Gauthier-Villars, Imprimeur-Editeur, Paris, 1952.)



Der Spieler  $B$  habe bei diesem Spiel einen einmaligen Einsatz zu leisten. Ist die Höhe dieses Einsatzes festgelegt mit

$$\mathfrak{E} = E(X), \quad (9)$$

dann heißt das Spiel „gerecht“ oder „billig“. Der Grund dafür ist folgender:

Bezeichnet man mit  $Y$  den „Gewinn“ des  $A$ :

$$Y = \mathfrak{E} - X,$$

so ist

$$E(Y) = E(\mathfrak{E} - X) = \mathfrak{E} - E(X) = 0. \quad (10)$$

Die Gewinnerwartung des  $A$  ist also gleich Null, und dasselbe gilt, wie man leicht zeigen kann, für die Gewinnerwartung des  $B$ .

Ist aber der Einsatz des  $B$  von  $\mathfrak{E}$  verschieden, so bedeutet das, daß das Prinzip der Gerechtigkeit verletzt wurde, und zwar zugunsten des  $A$ , falls er  $> \mathfrak{E}$ , zugunsten des  $B$ , falls er  $< \mathfrak{E}$  ist.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt nun, daß ein über ein endliches Vermögen verfügender Spieler  $A$  mit Sicherheit seinem Ruin (das heißt dem Verlust seines gesamten Vermögens) entgehe, wenn er fortlaufend Spiele um den gerechten Einsatz spielt. Um den sicheren Ruin zu vermeiden, muß  $A$  von seinem jeweiligen Partner  $B$  einen um einen „Sicherheitszuschlag“ erhöhten Einsatz

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + a, \quad (a > 0) \quad (11)$$

fordern. Durch die Einhebung eines Sicherheitszuschlages zum gerechten Einsatz wird zwar die Möglichkeit des Ruins nicht ausgeschlossen; aber die Wahrscheinlichkeit, ruiniert zu werden, wird sicherlich um so geringer, je höher der Zuschlag bemessen wird.

Es ergibt sich somit die Frage, wie hoch der Sicherheitszuschlag  $a$  anzusetzen ist, damit die Wahrscheinlichkeit, daß  $A$  ruiniert werde, eine willkürliche und natürlich entsprechend niedrig festzusetzende obere Schranke nicht überschreite.

Die Antwort auf diese Frage ist in einem von Finetti herrührenden Theorem enthalten (siehe die in Fußnote 1 an erster Stelle genannte Arbeit). Die folgenden Ausführungen sind zum Verständnis des Theorems unerlässlich:

Wenn  $A$  den Einsatz (11) einhebt, so ist sein Gewinn

$$Y = \mathfrak{E}' - X \quad (12)$$

und der Erwartungswert des Gewinnes:

$$E(Y) = E(\mathfrak{E}' - X) = \mathfrak{E}' - \mathfrak{E} = a > 0. \quad (13)$$

Daraus folgt, daß  $Y$  positive Werte annehmen muß (weil ansonsten  $E(Y)$  nicht positiv sein könnte). Aber  $Y$  muß auch negative Werte annehmen, weil ja sonst  $A$  auf jeden Fall gewinnen,  $B$  auf jeden Fall verlieren müßte; ein derartiges Spiel könnte aber unter normalen Bedingungen nie zustande kommen.

Man kann daher zwei positive Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  angeben derart, daß es Werte von  $Y$  gibt, die  $> \alpha$  sind, und auch Werte von  $Y$ , die  $< -\beta$  sind. Es ist dann

$$W\{Y \geq \alpha\} > 0; \quad W\{Y < -\beta\} > 0. \quad (14)$$

Sei nun  $G(y)$  die Verteilungsfunktion, und

$$g(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} \cdot dG(y)$$

die charakteristische Funktion von  $Y$ . Man kann dann zeigen, daß

$$g(\infty) = \infty; \quad g(-\infty) = \infty. \quad (15)$$

Zum Beweis der ersten dieser beiden Gleichungen hat man ( $t > 0$  vorausgesetzt):

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\alpha} e^{ty} \cdot dG(y) + \int_{\alpha}^{\infty} e^{ty} \cdot dG(y) \geq \int_{\alpha}^{\infty} e^{ty} \cdot dG(y) \geq e^{\alpha t} (1 - G(\alpha)) = e^{\alpha t} \cdot W\{Y \geq \alpha\}.$$

Wegen der ersten Gl. (14) folgt daraus die erste Gl. (15).

Ganz ähnlich verläuft der Beweis der zweiten Gl. (15) (wobei  $t < 0$  vorausgesetzt wird):

$$g(t) = \int_{-\infty}^{-\beta} e^{ty} \cdot dG(y) + \int_{-\beta}^{\infty} e^{ty} \cdot dG(y) \geq \int_{-\beta}^{\infty} e^{ty} \cdot dG(y) \geq e^{-\beta t} \cdot G(-\beta) = e^{-\beta t} \cdot W\{Y < -\beta\}.$$

Wegen der zweiten Gl. (14) folgt daraus die zweite Gl. (15).

Es ist ferner:

$$g(0) = E(1) = 1; \quad g'(0) = E(Y) = a > 0. \quad (16)$$

Schließlich ist  $g''(t) > 0$  [s. Gl. (7)].

Die Kurve  $u = g(t)$  ist demnach überall konkav nach oben, geht durch den Punkt  $(0,1)$  hindurch und hat dort eine Tangente mit dem Steigungskoeffizienten  $a > 0$ . Beachtet man noch die Relationen (15), so sieht man, daß der Verlauf der Kurve  $u = g(t)$  durch die nebenstehende Figur wiedergegeben werden kann.

Wie aus der Abbildung unmittelbar ersichtlich, schneidet eine Parallele zur  $t$ -Achse durch den Punkt  $P = (0,1)$  die Kurve in genau einem von  $P$  verschiedenen Punkt  $Q$ , und  $Q$  hat negative Abszisse. Sei  $-\tau$  ( $\tau > 0$ ) die Abszisse des Punktes  $Q$ . Dann hat also die Gleichung

$$g(t) = 1 \quad (17)$$

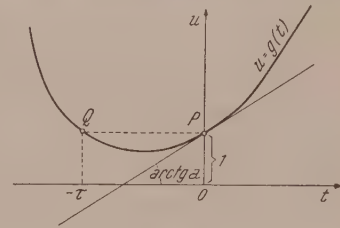


Abb. 1

außer der Lösung  $t = 0$  auch noch die davon verschiedene Lösung  $t = -\tau$ . (Man überlegt leicht, daß es eine derartige Zahl  $\tau > 0$  nur dann gibt, wenn  $\mathfrak{E}' > \mathfrak{E}$ ; für  $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}$  würde sich  $\tau = 0$  ergeben.)

Zwischen der charakteristischen Funktion  $f(t)$  von  $X$  und jener  $g(t)$  von  $Y$  besteht eine einfache Beziehung; es ist nämlich:

$$g(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(\mathfrak{E}' - X)}) = e^{t\mathfrak{E}'} \cdot E(e^{-tX}) = e^{t\mathfrak{E}'} \cdot f(-t). \quad (18)$$

Setzt man in (18)  $t = -\tau$ , so folgt wegen (17):

$$g(-\tau) = 1 = e^{-\tau\mathfrak{E}'} \cdot f(\tau), \quad (19)$$

und daraus erhält man:

$$\mathfrak{E}' = \frac{\ln f(\tau)}{\tau}. \quad (20)$$

Wie aus dem sogleich anzuführenden Theorem von Finetti hervorgeht, spielt die Zahl  $\tau$  in dem hier behandelten Problem eine entscheidende Rolle. Sie heißt daher der „Sicherheitsindex“ des Spieles. Formel (20) zeigt, wie der einem vorgegebenen Sicherheitsindex  $\tau$  entsprechende Einsatz  $\mathfrak{E}'$  zu berechnen ist.

Das Theorem von Finetti lautet nun folgendermaßen:

„Es sei  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$  eine unendliche Folge voneinander unabhängiger Spiele, und es sei  $A$  ein über ein (endliches) Vermögen  $K$  verfügender Spieler, der ein Spiel der Folge nach dem anderen spielt. Die bei diesen Spielen an  $A$  zu leistenden Einsätze seien  $\mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2', \dots$ . Dieselben seien alle höher als die gerechten Einsätze, und zwar seien sie so bemessen, daß sie alle ein- und demselben Sicherheitsindex  $\tau$  entsprechen. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit  $\Pi$  dafür, daß  $A$  im Verlaufe dieser Spielfolge ruiniert wird, die Ungleichung

$$\Pi \leq e^{-\tau K}. \quad (21)$$

Es sei bemerkt, daß die Folge  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$  keineswegs aus der dauernden Wiederholung eines und desselben Spieles zu bestehen braucht. Die Spiele der Folge dürfen, sowohl ihrer Art nach als auch hinsichtlich der aufs Spiel gesetzten Beträge, voneinander ganz verschieden sein. Wichtig ist nur, daß der zu jedem Spiel an  $A$  zu leistende Einsatz dem Sicherheitsindex  $\tau$  entspricht.

Der — übrigens gar nicht so schwierige — Beweis dieses interessanten Theorems muß hier leider aus Raummangel unterdrückt werden. Der Leser findet ihn entweder in der unter Fußnote 1 an erster Stelle genannten Arbeit von Finetti oder aber in dem unter Fußnote 3 genannten Werk von Dubourdieu. Hier sollen nur einige Worte über die Anwendung des Theorems folgen:

Da der Sicherheitszuschlag niemals so hoch bemessen werden kann, daß  $A$  auf jeden Fall gewinnt, bleibt für  $A$  immer eine gewisse Ruinwahrscheinlichkeit bestehen.  $A$  wird also zunächst eine Entscheidung darüber zu treffen haben, welche Ruinwahrscheinlichkeit er in Kauf nehmen will. Hat er sich für eine derartige — im allgemeinen immer sehr kleine — Wahrscheinlichkeit  $\Pi$  entschieden, so kann er auf Grund von (21) den anzuwendenden Sicherheitsindex berechnen:

$$\tau = - \frac{\ln \Pi}{K}, \quad (22)$$

und dann auf Grund von (20) die einzuhebenden Einsätze.

Es ist klar, daß das soeben besprochene Theorem auch für die Versicherungstechnik von allergrößtem Interesse ist. Denn jede Versicherung ist ja eine Art Spiel oder Wette, bei welcher der Versicherte auf den Eintritt, der Versicherer hingegen auf den Nichteintritt des versicherten Ereignisses wettet. Der Versicherer befindet sich in der Lage des Spielers  $A$ , da er einer praktisch unbegrenzten Anzahl von Spielpartnern, das heißt Versicherten, gegenübersteht. Er kann sich also in seiner Geschäftsführung die im Finettischen Theorem enthaltenen Erkenntnisse zunutze machen.

Tatsächlich bietet das Theorem von Finetti dem Versicherer nicht nur eine Richtschnur bei der Berechnung seiner Prämien; es versetzt ihn auch in die Lage, das Maximum seines Selbstbehaltes zu bestimmen, und auch die Theorie der Rückversicherung kann ganz darauf gegründet werden. Die Anwendungsmöglichkeiten des Theorems sind also sehr zahlreich.

Auf die Details der soeben angedeuteten Fragen kann und soll aber hier nicht eingegangen werden, da dieselben allzu speziellen Charakters und — im Gegensatz zum Finettischen Theorem selbst — nicht von allgemeinem Interesse sind.

(Eingegangen am 22. Februar 1956)

## Über ein, einer selbstadjungierten Differentialgleichung zuordenbares dreidimensionales Variationsproblem

Von H. Sagan, Bozeman-Mont.

**Zusammenfassung.** Es wird das dreidimensionale Variationsproblem für die Schwingungen einer kreisförmigen, am Rande eingespannten unbelasteten Membran betrachtet. Die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung dieses Problems ergibt nach einem Bernoullischen Separationsansatz unter anderem die Besselsche Differentialgleichung. Geht man jedoch mit dem Separationsansatz direkt in das ursprüngliche Variationsproblem ein, erhält man für die Extremalen drei Integrodifferentialgleichungen, die zusammen mit den ursprünglich erhaltenen Gleichungen zwanglos das für den kleinsten Eigenwert der Besselschen Gleichung charakteristische isoperimetrische Problem ergeben. Diese Methode wird sodann für die Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung verallgemeinert.

Betrachtet seien die Schwingungen einer kreisrunden, am Rande eingespannten Membran, auf die keine äußeren Kräfte einwirken.



Es soll  $u = u(t, r, \varphi)$  die Deformation der Membran normal zur Gleichgewichtslage bezeichnen. Die Spannung  $\mu$  sei als konstant angenommen und der Einfachheit halber  $\mu = 1$  gesetzt. Ferner sei der Radius  $r = 1$  angenommen.

Die Bewegungsgleichung ergibt sich auf Grund des Hamiltonschen Prinzips, das heißt, das Zeitintegral über die Lagrangesche Funktion soll einen stationären Wert annehmen<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( r u_t^2 - r u_r^2 - \frac{1}{r} u_\varphi^2 \right) dr d\varphi dt &\rightarrow \text{stat.} \\ u(t, 1, \varphi) = 0, \quad u(0, r, \varphi) = f(r, \varphi) \\ \frac{\partial u(0, r, \varphi)}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Euler-Lagrangesche Gleichung dieses Problems lautet

$$r u_{rr} + \frac{1}{r} u_{\varphi\varphi} + u_r = r u_{tt}.$$

Vermittels des Bernoullischen Separationsansatzes

$$u = T(t) \Phi(\varphi) R(r)$$

erhält man daraus die drei Gleichungen:

$$T'' + \lambda^2 T = 0, \quad (2a)$$

$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0, \quad (2b)$$

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda^2 r^2 - n^2) R = 0, \quad (2c)$$

deren letzte die Besselsche Differentialgleichung mit der Lösung  $R = J_n(\lambda r)$  ist.

Der kleinste Eigenwert  $\lambda$  ist gekennzeichnet durch das isoperimetrische Problem<sup>2</sup>

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^1 \left( r R'^2 - \frac{n^2}{r} R^2 \right) dr}{\int_0^1 r R^2 dr} \rightarrow \text{stat.} \quad (3)$$

Es sei nun gezeigt, wie sich (3) zwanglos aus dem erzeugenden Problem (1) ergibt, wenn man mit dem Separationsansatz direkt in (1) eingeht: (1) geht dann über in das Problem, drei Funktionen  $T$ ,  $\Phi$  und  $R$  so zu bestimmen, daß

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( r T'^2 \Phi^2 R^2 - r T^2 \Phi^2 R'^2 - \frac{1}{r} T^2 \Phi'^2 R^2 \right) dr d\varphi dt$$

stationär wird, wobei

$$R(1) = 0, \quad \frac{\partial T(0)}{\partial t} = 0, \quad T(0) \cdot \Phi(\varphi) \cdot R(r) = f(r, \varphi)$$

sein soll.

Berücksichtigt man nun, daß die unbekannten Funktionen jeweils nur von einer Veränderlichen abhängen sollen, nehmen die zugehörigen Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen die folgende Gestalt an<sup>3</sup>:

<sup>1</sup> Vgl. etwa Courant-Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*, p. 248. New York: Interscience Publishers, Inc.

<sup>2</sup> Vgl. etwa F. B. Hildebrand: *Methods of Applied Mathematics*, p. 145. New York: Prentice-Hall, Inc.

<sup>3</sup> Vgl. H. Sagan: Über das Minimum eines gewissen Doppelintegrals. Dissertation Univ. Wien, 1950.

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_0^1 \left( r T'^2 R^2 \Phi - r T^2 \Phi R'^2 + \frac{1}{r} T^2 \Phi'' R^2 \right) dt dr = 0, \quad (4a)$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_0^{2\pi} \left( r T'^2 \Phi^2 R - \frac{1}{r} T^2 \Phi'^2 R + T^2 \Phi^2 R' + r T^2 \Phi^2 R'' \right) dt d\varphi = 0, \quad (4b)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( r T \Phi^2 R'^2 + \frac{1}{r} T R'^2 \Phi'^2 + r T'' R^2 \Phi^2 \right) dr d\varphi = 0. \quad (4c)$$

Aus (2b) folgt nun, daß

$$\int_0^{2\pi} \Phi^2 d\varphi = \pi C, \quad (5a)$$

wo  $C$  eine willkürliche Konstante ist und

$$\int_0^{2\pi} \Phi'^2 d\varphi = n^2 \pi C. \quad (5b)$$

Geht man damit in (4b) ein, ergibt sich

$$\int_0^1 \left( r T R'^2 + \frac{1}{r} T R^2 n^2 + r T'' R^2 \right) dr = 0$$

und daraus

$$T'' = -T \frac{\int_0^1 \left( r R'^2 + \frac{n^2}{r} R^2 \right) dr}{\int_0^1 r R^2 dr}.$$

Dies zusammen mit Gl. (2a) ergibt zur Charakterisierung des kleinsten Eigenwertes  $\lambda$  das isoperimetrische Problem

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^1 \left( r R'^2 + \frac{n^2}{r} R^2 \right) dr}{\int_0^1 r R^2 dr} \rightarrow \text{stat},$$

welches mit (3) identisch ist.

Die soeben durchgeführte Methode läßt sich nun leicht für das mit der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung in allgemeinerer Form äquivalente Problem in gewissem Sinne generalisieren:

Betrachtet man das Problem, eine Funktion  $u = u(x, y, z)$  so zu bestimmen, daß das Integral

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} \int_c^d [p(x) u_x^2 + q(x) u_y^2 - r(x) u_z^2] dx dy dz$$

unter geeigneten Randbedingungen stationär wird, wobei  $p, q, r$  stetig differenzierbare Funktionen von  $x$  sein sollen, so erhält man als Euler-Lagrangesche Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{p'}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{p}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{q}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Daraus ergeben sich mit dem Separationsansatz  $u = X(x) Y(y) Z(z)$  die drei Gleichungen

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad (6a)$$

$$Y'' + n^2 Y = 0, \quad (6b)$$

$$\frac{d}{dx} [p(x) \cdot X'(x)] + [\lambda^2 r(x) - n^2 q(x)] X(x) = 0. \quad (6c)$$

Geht man nun wieder mit demselben Ansatz in das erzeugende Variationsproblem ein, so ergibt sich unter anderem die Integrodifferentialgleichung

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b (p X'^2 Y^2 Z + q X^2 Y'^2 Z + r X^2 Y^2 Z'') dy dx = 0$$

und daraus erhält man

$$Z'' = -Z \cdot \frac{\int_0^{2\pi} \int_a^b (p X'^2 Y^2 + q X^2 Y'^2) dy dx}{\int_0^{2\pi} \int_a^b r X^2 Y^2 dy dx}.$$

Dies zusammen mit (5a), (5b) und (6b) ergibt für den kleinsten Eigenwert  $\lambda$  wieder das isoperimetrische Problem

$$\lambda^2 = \frac{\int_a^b [p(x) X'^2 + n^2 q(x) X^2] dx}{\int_a^b r(x) X^2 dx} \rightarrow \text{stat.}$$

(Eingegangen am 14. Februar 1956)

## Die drei Spannungsfunktionen des zweidimensionalen ebenen Kontinuums

Von H. Schaefer, Braunschweig

Mit 7 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Aus dem Tensor der Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums entstehen durch Grenzbetrachtungen die drei Spannungsfunktionen des zweidimensionalen ebenen Kontinuums, deren eine die bekannte Airysche ist. Die beiden anderen sind die Spannungsfunktionen der dünnen gebogenen Platte. Ihre Randbedingungen werden aufgestellt und ihre Differentialgleichungen integriert. Ähnlich wie im Airyschen Fall kann man die Spannungszustände ebener Rahmentragwerke geometrisch veranschaulichen, und diese Betrachtungen lassen sich zu einer statisch-kinematischen Analogie ausbauen.

### I. Die Nullspannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums

Ein Kontinuum sei durch Oberflächenkräfte belastet und befinde sich im Gleichgewicht.

Durch

$$\sigma_{ik} = \varepsilon_{i\alpha\lambda} \varepsilon_{k\beta\mu} \partial_\alpha \partial_\beta F_{\lambda\mu} \quad (1, 1)$$

werden die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\partial_k \sigma_{ik} = 0 \quad (1, 2)$$

des Spannungstensors  $\sigma_{ik}$  (identisch in den  $F_{ik}$ ) befriedigt<sup>1</sup>. Umgekehrt läßt sich jeder Spannungszustand im Gleichgewicht durch geeignete Wahl der  $F_{ik}$  in (1, 1) erfassen. Die  $F_{ik}$  sind die Komponenten eines symmetrischen Tensors, Tensor der Spannungsfunktionen genannt. Demnach sind in (1, 1) die sechs Komponenten des Spannungstensors durch zweite Ableitungen von sechs Spannungsfunktionen dargestellt.

(1, 1) und (1, 2) beziehen sich auf kartesische Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$ , die auch weiterhin benutzt werden sollen.

<sup>1</sup> B. Finzi: Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. Rend. Linc. 19 (1934).



Wir geben nun die Beziehungen an, die zwischen Spannungsfunktionen und Oberflächenkräften bestehen<sup>2</sup>. Zunächst werde (1, 1) mit Hilfe des unsymmetrischen Tensors  $\gamma_{ik}$  zerlegt in

$$\sigma_{ik} = \varepsilon_{i\alpha\lambda} \partial_\alpha \gamma_{\lambda k}; \quad \gamma_{\lambda k} = \varepsilon_{k\beta\mu} \partial_\beta F_{\lambda\mu}. \quad (1, 3)$$

Im Kontinuum sei nun eine geschlossene Kurve  $C$  mit Durchlaufungssinn gegeben, die ein Flächenstück  $f$  beliebiger Gestalt berandet. Im übrigen sollen dieselben topologischen Voraussetzungen gelten, die dem Satze von Stokes zugrunde liegen.

Dann geben die sechs Kurvenintegrale längs  $C$

$$K_i = \oint \gamma_{\alpha i} dx_\alpha, \quad (1, 4)$$

$$M_i^{(0)} = \oint (F_{\alpha i} + \varepsilon_{i\alpha\beta} x_\alpha \gamma_{\beta\beta}) dx_\alpha \quad (1, 5)$$

die auf den Anfangspunkt des Koordinatensystems reduzierte Dynamik sämtlicher Oberflächenkräfte, die zu derjenigen Seite von  $f$  gehören, die beim Durchlaufen von  $C$  links liegt.

In spannungsfreien Bereichen müssen die Integranden der Kurvenintegrale totale Differentiale sein. Die Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen führt zu dem Ergebnis, daß sich  $F_{ik}$  als symmetrischer Gradiententensor

$$F_{ik}^0 = \frac{1}{2} (\partial_i v_k + \partial_k v_i) \quad (1, 7)$$

darstellen lassen muß, Tensor der Nullspannungsfunktionen genannt. Entartet das Kontinuum zu einer gespannten Fläche oder Kurve, so muß, da im ganzen übrigen Raume (1, 7) gilt, das Vektorfeld der  $v_i$  auf solchen zwei- bzw. eindimensionalen Gebilden Singularitäten besitzen.

Mit (1, 7) erhalten die Kurvenintegrale (1, 4) und (1, 5) die Gestalt

$$K_i = \oint d \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{i\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta \right), \quad (1, 8)$$

$$M_i^{(0)} = \oint d \left( v_i + x_\alpha \frac{1}{2} (\partial_i v_\alpha - \partial_\alpha v_i) \right). \quad (1, 9)$$

Die Integranden sind zwar jetzt totale Differentiale, jedoch können die  $K_i$  und  $M_i^{(0)}$  bei Mehrdeutigkeit oder Unstetigkeiten des Vektorfeldes der  $v_i$  von Null verschieden sein.

## II. Die drei Spannungsfunktionen des ebenen zweidimensionalen Kontinuums

Das Kontinuum sei zur Ebene  $x_3 = 0$ , also zur  $(x, x_2)$ -Ebene des Koordinatensystems entartet, und die Ebene sei auf ihrer Ober- und Unterseite unbelastet. Wir fragen nach den Eigenspannungszuständen der sich nach allen Seiten ins Unendliche erstreckenden Ebene.

Die Komponenten der Dynamik (1, 8) und (1, 9) teilen wir in zwei Gruppen auf:

$$K_1 = \oint d \left( \partial_2 v_3 - \frac{1}{2} (\partial_2 v_3 + \partial_3 v_2) \right), \quad (2, 1a)$$

$$K_2 = \oint d \left( -\partial_1 v_3 + \frac{1}{2} (\partial_3 v_1 + \partial_1 v_3) \right), \quad (2, 1b)$$

$$M_3^{(0)} = \oint d \left( v_3 - x_1 \partial_1 v_3 - x_2 \partial_2 v_3 + x_1 \frac{1}{2} (\partial_1 v_3 + \partial_3 v_1) + x_2 \frac{1}{2} (\partial_2 v_3 + \partial_3 v_2) \right) \quad (2, 1c)$$

<sup>2</sup> G. Peretti: Significato del tensore arbitrario che interviene nell'integrale generale delle equazioni della statica dei continui. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **3** (1949). — W. Günther: Spannungsfunktionen und Verträglichkeitsbedingungen der Kontinuums-Mechanik. Abh. Braunschweig. Wissensch. Ges. **6** (1954).

und

$$K_3 = \oint d \frac{1}{2} (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1), \quad (2, 2a)$$

$$M_1^{(0)} = \oint d \left( v_1 + x_2 \frac{1}{2} (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \right), \quad (2, 2b)$$

$$M_2^{(0)} = \oint d \left( v_2 - x_1 \frac{1}{2} (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \right). \quad (2, 2c)$$

In (2, 2b) und (2, 2c) sind die mit  $x_3$  multiplizierten Summanden aus gleich ersichtlichen Gründen fortgelassen worden.

Das Vektorfeld  $v_i(x_1, x_2, x_3)$  soll in der Ebene  $x_3 = 0$  folgende Unstetigkeiten aufweisen:

$$\lim_{\varepsilon=0} [v_i(x_1, x_2, 0 + \varepsilon) - v_i(x_1, x_2, 0 - \varepsilon)] = \Phi_i(x_1, x_2), \quad (2, 3)$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2} [\partial_2 v_3 + \partial_3 v_2]_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} = f_1(x_1, x_2), \quad (2, 4)$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2} [\partial_3 v_1 + \partial_1 v_3]_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} = f_2(x_1, x_2). \quad (2, 5)$$

Wir schneiden einen einfach zusammenhängenden Bereich aus der Ebene heraus und nehmen unsere Kurvenintegrale über eine Kurve  $C$ , die zwei Randpunkte  $A$  und  $B$  des Bereiches verbindet und von  $B$  nach  $A$  auf der Oberseite, von  $A$  nach  $B$  auf der Unterseite der Ebene  $x_3 = 0$  verläuft (Abb. 1).

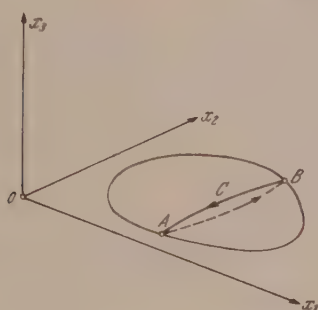


Abb. 1. Weg der Umlaufintegrale

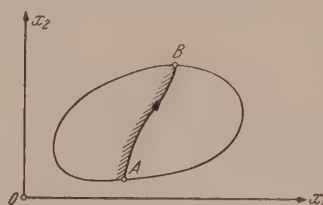


Abb. 2. Schnitt längs einer Kurve von  $A$  nach  $B$

Bei Beachtung der Unstetigkeiten der Integranden an den Stellen  $A$  und  $B$  erhält man

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= [\partial_2 \Phi_3 - f_1]_A^B; & K_2 &= [-\partial_1 \Phi_3 + f_2]_A^B, \\ M_3^{(0)} &= [\Phi_3 - x_1 (\partial_1 \Phi_3 - f_2) - x_2 (\partial_2 \Phi_3 - f_1)]_A^B; \end{aligned} \right\} \quad (2, 6)$$

$$\left. \begin{aligned} K_3 &= \frac{1}{2} [\partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1]_A^B, \\ M_1^{(0)} &= \left[ \Phi_1 + x_2 \frac{1}{2} (\partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1) \right]_A^B, \\ M_2^{(0)} &= \left[ \Phi_2 - x_1 \frac{1}{2} (\partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1) \right]_A^B. \end{aligned} \right\} \quad (2, 7)$$

Diese beiden Formelgruppen geben die auf den Nullpunkt reduzierte Dynamik derjenigen Randbelastung, die an dem schraffierten Bereichsrand zwischen  $A$  und  $B$  (Abb. 2) angreift. Etwas anders ausgedrückt: Ein Bereich des ebenen Kontinuums  $x_3 = 0$  werde durch eine vom Randpunkt  $A$  zum Randpunkt  $B$  verlaufende beliebige Kurve in zwei Teile zerschnitten (Abb. 2). Die Dynamik der am linken Schnittufer angreifenden Randbelastung ist durch die Formelgruppe (2, 6) und (2, 7) gegeben.

(2, 6) sind die aus der Theorie der Airyschen Spannungsfunktion wohlbekannten Gleichungen, sofern man  $f_1$  und  $f_2$  Null setzt. Die dritte Komponente des Vektors

$(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$  ist demnach die Airysche Spannungsfunktion. Eine Diskussion der Formelgruppe (2, 6) mit nicht verschwindenden  $f_1$  und  $f_2$  führt zu dem merkwürdigen Ergebnis, daß neben den in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene liegenden Randkräften noch Randmomente in  $x_3$ -Richtung auftreten, welche die Symmetrie der Schubspannungen zerstören. Man weiß jedoch, daß solche Momente nur als Belastungssingularitäten an diskreten Stellen auftreten können, dagegen niemals kontinuierlich verteilt über Linien oder Flächen: Ausführliche Erörterungen und Literaturangaben über diese oft diskutierte Frage findet man bei Cosserat<sup>3</sup>.

Die Spannungsfunktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  der Formelgruppe (2, 7) gehören offensichtlich zum Problem der Plattenbiegung. Da sie im Gegensatz zur Airyschen Spannungsfunktion  $\Phi_3$  meines Wissens nie gebraucht worden sind<sup>4</sup>, sollen sie Gegenstand der nachstehenden Ausführungen sein.

### III. Die beiden Spannungsfunktionen der Plattenbiegung Statische Deutungen und Randbedingungen

Wir können mit Hilfe von (2, 7) die Randbelastungen eines Plattenelementes durch Ableitungen der Spannungsfunktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  ausdrücken. Zunächst führen wir die Abkürzung

$$\Omega = \frac{1}{2} (\partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1) \quad (3, 1)$$

ein. Nun wenden wir (2, 7) auf ein Randstück der infinitesimalen Länge  $ds$  an (Abb. 3), an dem je Längeneinheit die Kraft  $k_3(s)$  und die Momente  $m_1(s)$  und  $m_2(s)$  angreifen:

$$dK_3 = d\Omega = k_3 ds, \quad (3, 2)$$

$$dM_1^{(0)} = d\Phi_1 + d(x_2 \Omega) = m_1 ds + x_2 k_3 ds, \quad (3, 3)$$

$$dM_2^{(0)} = d\Phi_2 - d(x_1 \Omega) = m_2 ds - x_1 k_3 ds. \quad (3, 4)$$

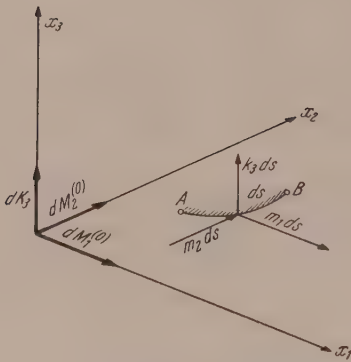


Abb. 3. Die am Element  $ds$  des Randes angreifende Belastung

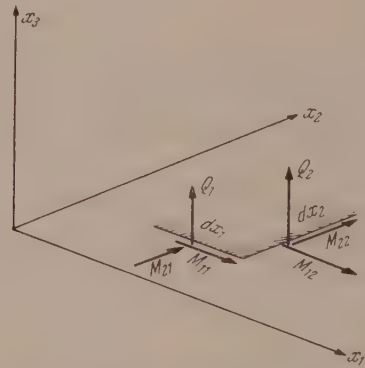


Abb. 4. Die Schnittlasten der Platte

Durch Integration längs eines Randstückes endlicher Länge  $s$  erhalten wir aus (3, 2), (3, 3) und (3, 4)

$$\Omega(s) = \int_0^s k_3(\sigma) d\sigma + \Omega(0), \quad (3, 5)$$

<sup>3</sup> E. Cosserat und F. Cosserat: *Théorie des corps déformables*. Paris. 1909. Ferner auch R. v. Mises: *Anwendungen der Motorrechnung*. Z. angew. Math. Mech. 4 (1924).

<sup>4</sup> Erwähnt werden sie bei W. Günther: *Die Gleichungen der Plattenbiegung als kanonisches System in tensorieller Darstellung*. Abh. Braunschwg. Wissensch. Ges. 5 (1953).



$$\Phi_1(s) = \int_0^s m_1(\sigma) d\sigma - \int_0^s [x_2(s) - x_2(\sigma)] k_3(\sigma) d\sigma + \Phi_1(0) - [x_2(s) - x_2(0)] \Omega(0), \quad (3, 6)$$

$$\Phi_2(s) = \int_0^s m_2(\sigma) d\sigma + \int_0^s [x_1(s) - x_1(\sigma)] k_3(\sigma) d\sigma + \Phi_2(0) + [x_1(s) - x_1(0)] \Omega(0). \quad (3, 7)$$

Damit sind die Randwerte von  $\Omega$ ,  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  durch die Randbelastungen ausgedrückt.  $\Omega$  ist die Summe aller Randquerkräfte. Ganz entsprechend der Airyschen Spannungsfunktion  $\Phi_3$  sind  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  die Momente der Randbelastung, bezogen auf den Endpunkt eines Randstückes.

Der Vektor  $(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$  der drei Spannungsfunktionen des zweidimensionalen ebenen Kontinuums läßt sich statisch deuten als Momentenvektor im Endpunkt eines belasteten Randstückes.

Aus (3, 3) und (3, 4) folgt:

$$m_1 ds = d\Phi_1 + \Omega dx_2, \quad (3, 8)$$

$$m_2 ds = d\Phi_2 - \Omega dx_1. \quad (3, 9)$$

Hiermit erhalten wir nach Abb. 4 für das Randstück  $ds = dx_1$ ,  $dx_2 = 0$

$$M_{11} dx_1 = \partial_1 \Phi_1 dx_1, \quad (3, 10)$$

$$M_{21} dx_1 = \partial_1 \Phi_2 dx_1 - \Omega dx_1, \quad (3, 11)$$

$$Q_1 dx_1 = \partial_1 \Omega dx_1 \quad (3, 12)$$

und für  $ds = dx_2$ ,  $dx_1 = 0$

$$M_{12} dx_2 = \partial_2 \Phi_1 dx_2 + \Omega dx_2, \quad (3, 13)$$

$$M_{22} dx_2 = \partial_2 \Phi_2 dx_2, \quad (3, 14)$$

$$Q_2 dx_2 = \partial_2 \Omega dx_2. \quad (3, 15)$$

Aus (3, 10) bis (3, 15) liest man die Darstellung der Schnittlasten durch die Spannungsfunktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  ab:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Biegemomente: } M_{11} = \partial_1 \Phi_1; \quad M_{22} = \partial_2 \Phi_2, \\ \text{Drillmomente: } M_{12} = M_{21} = \frac{1}{2} (\partial_1 \Phi_2 + \partial_2 \Phi_1), \\ \text{Querkräfte: } Q_1 = \frac{1}{2} \partial_1 (\partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1); \quad Q_2 = \frac{1}{2} \partial_2 (\partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1). \end{array} \right\} \quad (3, 16)$$

Durch Elimination von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  gewinnt man die bekannten Gleichgewichtsbedingungen am Plattenelement:

$$\left. \begin{array}{l} \partial_2 Q_1 - \partial_1 Q_2 = 0, \\ \partial_1 M_{21} - \partial_2 M_{11} = Q_1, \\ \partial_1 M_{22} - \partial_2 M_{12} = Q_2. \end{array} \right\} \quad (3, 17)$$

#### IV. Die Differentialgleichungen der Spannungsfunktionen einer Platte

Bei vorgeschriebener Randbelastung der Platte sind durch (3, 5), (3, 6) und (3, 7) die Randwerte von  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  und  $\partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1$  bekannt. Für die Berechnung der Funktionen  $\Phi_1(x_1, x_2)$  und  $\Phi_2(x_1, x_2)$  stehen zwei Kompatibilitätsgleichungen zur Verfügung, die zwischen den fünf Schnittlasten  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  und  $M_{12}$  bestehen. Man gewinnt sie aus den bekannten Gleichungen der dünnen isotropen Platte:

$$\partial_1 \partial_1 w = -1/N (M_{22} - \nu M_{11}), \quad (4, 1)$$

$$\partial_2 \partial_2 w = -1/N (M_{11} - \nu M_{22}), \quad (4, 2)$$

$$\partial_1 \partial_2 w = (1 + \nu)/N M_{12} = (1 + \nu)/N M_{21} \quad (4, 3)$$

( $w$  = Verschiebung der Plattenmittelfläche in  $x_3$ -Richtung,  $\nu$  = Querkontraktionsziffer,  $N$  = Konstante, zusammengesetzt aus Elastizitätsmodul und Plattendicke) durch Elimination von  $w$ . Sie lauten

$$\partial_2 (M_{11} + M_{22}) + (1 + \nu) (\partial_1 M_{21} - \partial_2 M_{11}) = 0, \quad (4, 4)$$

$$\partial_1 (M_{11} + M_{22}) - (1 + \nu) (\partial_1 M_{22} - \partial_2 M_{12}) = 0 \quad (4, 5)$$

oder mit (3, 17)

$$\partial_2 M + (1 + \nu) \partial_1 \Omega = 0; \quad \partial_1 M - (1 + \nu) \partial_2 \Omega = 0, \quad (4, 6)$$

$$M = \partial_1 \Phi_1 + \partial_2 \Phi_2; \quad \Omega = \frac{1}{2} (\partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1). \quad (4, 7)$$

$(1 + \nu) \Omega$  und die Momentensumme  $M = M_{11} + M_{22}$  sind demnach harmonisch-konjugierte Funktionen. (4, 6) und (4, 7) weisen eine bemerkenswerte Analogie mit den Grundgleichungen des ebenen Formänderungszustandes auf.  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  entsprechen den Verschiebungen, und an Stelle von  $M$  und  $\Omega$  treten dort die Volumdilatation und Drehung<sup>4a</sup>. Es stehen demnach bekannte Integrationsverfahren zur Verfügung, von denen wir hier das Love-Marguerresche benutzen wollen<sup>5</sup>.

Durch den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= -\partial_2 H + (1 + \nu)/2 \partial_1 G, \\ \Phi_2 &= \partial_1 H + (1 + \nu)/2 \partial_2 G \end{aligned} \right\} \quad (4, 8)$$

entsteht aus (4, 7)

$$M = (1 + \nu)/2 \Delta G; \quad \Omega = 1/2 \Delta H \quad (4, 9)$$

und aus (4, 6)

$$\partial_2 \Delta G + \partial_1 \Delta H = 0; \quad \partial_1 \Delta G - \partial_2 \Delta H = 0. \quad (4, 10)$$

Mit

$$H = \partial_1 \psi; \quad G = \partial_2 \psi \quad (4, 11)$$

folgt aus (4, 10)

$$\Delta \Delta \psi = 0. \quad (4, 12)$$

Damit sind  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  und  $\Omega$  durch eine biharmonische Funktion ausgedrückt.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= - (1 - \nu)/2 \partial_1 \partial_2 \psi, \\ \Phi_2 &= \Delta \psi - (1 - \nu)/2 \partial_2 \partial_2 \psi, \end{aligned} \right\} \quad (4, 13)$$

$$\Omega = 1/2 \partial_1 \Delta \psi. \quad (4, 14)$$

Wir müssen nun die Frage der Randbedingungen erörtern, und wir stoßen auch hier auf die bei der dünnen Platte bekannte Schwierigkeit, drei Randbedingungen zu haben, von denen nur zwei erfüllt werden können. Bei vorgeschriebener Randbelastung sind die Randwerte von  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  und  $\Omega$  durch (3, 5), (3, 6) und (3, 7) festgelegt. Überdies ist  $\Omega$  als harmonische Funktion durch ihre Randwerte völlig bestimmt. Andererseits kann aber  $\psi$  nur zwei Randbedingungen erfüllen. Man umgeht diese Schwierigkeiten, indem man die Randbedingung für  $\Omega$  ignoriert. Schreibt man beispielsweise (3, 7) für eine Berandung  $x_2 = \text{konst. an}$ , so wird bei geeigneter Festlegung der Anfangswerte

$$\Phi_2(x_1) = \int_0^{x_1} M_{21}(\xi) d\xi + \int_0^{x_1} (x_1 - \xi) Q_1(\xi) d\xi \quad (4, 15)$$

<sup>4a</sup> Die Gleichungen des ebenen Spannungszustandes entstehen aus (4, 6) durch Umkehrung des Vorzeichens von  $\nu$ . Weitere Ausführungen in H. Schaefer: Die vollständige Analogie Scheibe—Platte. Abh. Braunschwg. Wissensch. Ges. 8 (1956).

<sup>5</sup> Eine sehr übersichtliche Zusammenstellung der gebräuchlichen Integrationsverfahren bei K. Marguerre: Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. Mech. 35 (1955).

und nach Umformung des ersten Integrals

$$\Phi_2(x_1) = \int_0^{x_1} (x_1 - \xi) \left( \frac{\partial M_{21}}{\partial \xi} + Q_1(\xi) \right) d\xi + x_1 M_{21}(0), \quad (4, 16)$$

womit die aus dem Drillmoment gebildete „Ersatzscherkraft“ auch hier in Erscheinung tritt. Wenn also bei Erfüllung der Randbedingungen für  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  die Randbedingungen für  $\Omega$  verletzt werden, so ist  $\Omega(x_1, x_2)$  nur in einer Randzone von der Größenordnung der Plattendicke fehlerhaft. Dieser Schönheitsfehler ist in der Theorie von E. Reissner<sup>6</sup>, die der Querkraftverformung Rechnung trägt, durch eine Funktion  $\Omega^*(x_1, x_2)$  korrigiert, die additiv zur rechten Seite von (4, 14) tritt. Sie genügt der Gleichung

$$\Omega^* - \frac{h^2}{10} \Delta \Omega^* = 0 \quad (4, 17)$$

( $h$  = Plattendicke), deren Lösung am Plattenrand  $x_2 = 0$  durch Überlagerung von Partikularlösungen

$$\Omega^* = \exp \left( -\frac{\sqrt{10}}{h} \sqrt{1 + n^2 \frac{\pi^2}{10} \frac{h^2}{l^2}} x_2 + i \frac{n \pi x_1}{l} \right) \quad (4, 18)$$

zu bilden ist. In der Entfernung  $x_2 = 1,5 h$  vom Rande ist aber jede dieser Lösungen mindestens auf ein Hundertstel ihres Randwertes abgeklungen, so daß  $\Omega$  tatsächlich nur in dieser schmalen Randzone zu korrigieren wäre.

Über den Zusammenhang der Spannungsfunktionen mit der Plattendurchbiegung  $w$  geben (4, 1), (4, 2) und (4, 3) Auskunft. Sie lassen sich integrieren zu

$$N \partial_1 w = (1 + \nu) \Phi_1 - \int M dx_1 - (1 + \nu) \Omega dx_2, \quad (4, 19)$$

$$N \partial_2 w = (1 + \nu) \Phi_2 - \int (1 + \nu) \Omega dx_1 + M dx_2. \quad (4, 20)$$

(4, 6) zufolge sind die Integranden totale Differentiale und die Integrale ein Paar harmonisch-konjugierter Funktionen<sup>7</sup>.

## V. Die Spannungsfunktionen der durch Einzelkraft und Einzelmoment belasteten Platte

Am Punkte  $O$  der Platte (Anfangspunkt des Koordinatensystems) soll eine Dyname angreifen, die aus einer Kraft  $P$  in  $x_3$ -Richtung und aus zwei Kräftepaaren  $R_1, R_2$  in  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Richtung besteht. Es sei etwa in  $O$  eine zur Plattenebene senkrechte Stange befestigt (Abb. 5), die durch diese Dyname beansprucht ist und diese auf die Platte überträgt. Es ist für die folgenden Betrachtungen vorteilhaft, sich vorzustellen, daß die Stange sich über die ganze positive  $x_3$ -Achse bis ins Unendliche erstreckt.

Da unterhalb der Platte im ganzen Halbraum keine Kräfte und Spannungen auftreten, können wir für  $x_3 < 0$  die  $v_i$  im Tensor der Nullspannungsfunktionen (1, 7) zu Null annehmen. Im Halbraum  $x_3 > 0$  müssen die  $v_i$  auf der  $x_3$ -Achse die für unsere Dyname charakteristische Singularität besitzen.

Da der Spannungszustand der Stange von  $x_3$  unabhängig ist, kann  $v_1 = v_1(x_1, x_2)$ ,  $v_2 = v_2(x_1, x_2)$  und  $v_3 = 0$  gesetzt

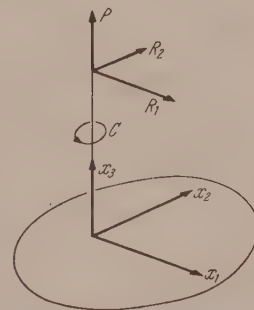


Abb. 5. Die durch Einzelkraft  $P$  und Einzelmomente  $R_1$  und  $R_2$  belastete Platte

<sup>6</sup> E. Reissner: On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math. 5 (1947). — M. Schäfer: Über eine Verfeinerung der klassischen Theorie dünner schwach gebogener Platten. Z. angew. Math. Mech. 32 (1952).

<sup>7</sup> Diesen Formeln kann man die beiden Bedingungen für den eingespannten Rand entnehmen, ferner diejenigen drei Bedingungen, die an einem inneren Rand eines mehrfach zusammenhängenden Bereiches zu stellen sind. Hier hat man Eindeutigkeit von  $\partial_1 w$ ,  $\partial_2 w$  und  $w$  selbst längs des Bereichsrandes zu verlangen.



werden. Die Kurvenintegrale (1, 8) und (1, 9) über eine den Stab umschlingende Kurve  $C$  (Abb. 5) müssen mit solchen  $v_i$  die vorgeschriebenen Werte  $K_1 = K_2 = 0$ ,  $K_3 = P$  und

$$M_1^{(0)} = R_1, \quad M_2^{(0)} = R_2, \quad M_3^{(0)} = 0$$

ergeben.

Der Ansatz

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= (R_1 - x_2 P) \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_2}{x_1} + A_1(x_1, x_2), \\ v_2 &= (R_2 + x_1 P) \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_2}{x_1} + A_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (5, 1)$$

erweist sich als geeignet, wobei die  $A_i$  eindeutige und außerhalb  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  reguläre Funktionen von  $x_1, x_2$  sind<sup>8</sup>.

In der Plattenebene  $x_3 = 0$  sind  $v_1$  und  $v_2$  mit den Spannungsfunktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  der Platte identisch, müssen sich demnach durch die biharmonische Funktion  $\varphi$  in (4, 13) darstellen lassen. Dies gelingt durch Kombination der Lösungen

$$x_1 \operatorname{Im}(z^2 \ln z) \quad \text{und} \quad x_2 \operatorname{Re}(z^2 \ln z) \quad (5, 2)$$

von (4, 12). Das Ergebnis einer längeren elementaren Rechnung lautet:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= (R_1 - x_2 P) \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_2}{x_1} + \frac{1+\nu}{2} (R_2 + x_1 P) \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{a} + \\ &\quad + \frac{1-\nu}{2} x_2 \frac{R_1 x_1 + R_2 x_2}{2\pi r^2} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\nu}{3} R_2 - \frac{3+\nu}{6} x_1 P, \right. \\ \Phi_2 &= (R_2 + x_1 P) \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_2}{x_1} - \frac{1+\nu}{2} (R_1 - x_2 P) \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{a} - \\ &\quad \left. - \frac{1-\nu}{2} x_1 \frac{R_1 x_1 + R_2 x_2}{2\pi r^2} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{3-\nu}{6} R_1 - \frac{3+\nu}{3} x_2 P \right), \right\} \quad (5, 3) \end{aligned}$$

woraus nach (4, 7)

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \left( P \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_2}{x_1} - \frac{R_1 x_1 + R_2 x_2}{r^2} \right) \quad (5, 4)$$

und

$$M = \frac{1+\nu}{2\pi} \left( P \ln \frac{r}{a} - \frac{R_1 x_2 - R_2 x_1}{r^2} \right) \quad (5, 5)$$

folgt. ( $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ ;  $a$  ist eine beliebige positive Zahl von der Dimension einer Länge.)

Diese Gleichungen können Verwendung finden, wenn man die Spannungsfunktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  in Abhängigkeit von einer gegebenen Randbelastung quellenmäßig darstellen will<sup>9</sup>.

## VI. Das ebene, senkrecht zu seiner Ebene belastete Stabwerk

Der Tensor der Nullspannungsfunktionen (1, 7) kann in Analogie zum Deformationstensor eines Kontinuums (bei infinitesimalen Verschiebungen) gesetzt werden. Das der Dyname zugeordnete Verschiebungsfeld (5, 1) ist allerdings unendlich vieldeutig. Ferner ist beim Durchtritt durch die Ebene  $x_3 = 0$  nach (2, 3) das Verschiebungsfeld unstetig. Im Rahmen dieser Analogie hat man es im ersten Falle mit einer Volterra-schen, im zweiten mit einer Somiglianaschen Distorsion zu tun<sup>10</sup>. Auch die Spannungs-

<sup>8</sup> H. Schaefer: Die Spannungsfunktionen einer Dyname. Abh. Braunschwg. Wissensch. Ges. 7 (1955).

<sup>9</sup> E. Weinel: Die Integralgleichungen des ebenen Spannungszustandes und der Platten-theorie. Z. angew. Math. Mech. 11 (1931). Dort wird die entsprechende Darstellung für die Ayrische Spannungsfunktion  $\Phi_3$  gegeben.

<sup>10</sup> P. Neményi: Selbstspannungen elastischer Gebilde. Z. angew. Math. Mech. 11 (1931). Dort Zitate der Arbeiten von Volterra und Somigiana.

funktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  lassen sich als infinitesimale Verschiebungen des ebenen Kontinuums  $x_3 = 0$  auffassen. Nach (3, 16) bilden die Momente den Deformationstensor, und nach (3, 1) ist  $\Omega$  die Drehung des Verschiebungsfeldes. Darauf wurde bereits in Abschnitt IV hingewiesen. Dem Angriff der Dyname (Abschnitt V) an der Platte entspricht ein unendlich vieldeutiges Verschiebungsfeld in der Ebene  $x_3 = 0$ , also eine ebene Volterrasche Distorsion. Unstetigkeiten des Feldes ( $\Phi_1, \Phi_2$ ) bedeuten in dieser Analogie Versetzungen (dislocations). Sie spielen als Singularitäten (linienförmig verteilte Inkompatibilitäten) von Eigenspannungszuständen eine Rolle in der Kristallphysik<sup>11</sup>. Die Grenzen unserer Analogie sind dadurch gezogen, daß in einem elastischen Kontinuum mit Distorsionen und Versetzungen das Verschiebungsfeld nicht allein durch seine Singularitäten bestimmt ist, daß es vielmehr über das Hookesche Gesetz mit Spannungen verknüpft ist, die den Gleichgewichtsbedingungen genügen müssen.

In der Kinematik des „Verschiebungsfeldes“ ( $\Phi_1, \Phi_2$ ) wollen wir die Bewegungen abgegrenzter starrer Ebenenstücke und die hierdurch entstehenden Verschiebungssprünge an den Berandungen näher betrachten. In solchen Bereichen lauten die Spannungsfunktionen

$$\Phi_1 = a_1 - \omega x_2; \quad \Phi_2 = a_2 + \omega x_1 \quad (6, 1)$$

mit den drei Konstanten  $a_1, a_2$  und  $\omega$ , den Komponenten der auf den Anfangspunkt bezogenen Verschiebungsschrauben. Nach (3, 1) ist  $\Omega = \omega$ , und zufolge (3, 15) sind

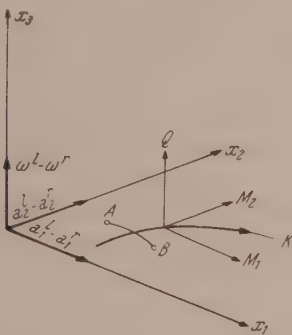


Abb. 6. Schnittkräfte eines gekrümmten Stabes als relative Verschiebungen zweier starrer Bereiche

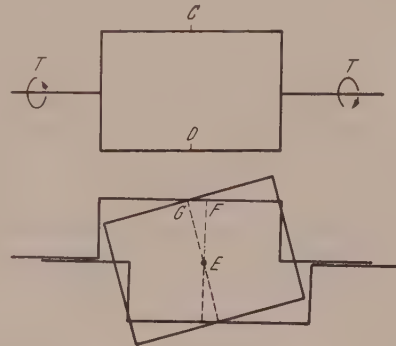


Abb. 7. Durchleitung eines Torsionsmomentes durch einen Rahmen

diese Gebiete frei von statischen Beanspruchungen. Durch die Kurve  $k$  mit Richtungssinn seien zwei solcher Bereiche getrennt (Abb. 6). Zum linken und rechten Bereich gehören die Schraubungskomponenten  $a_1^l, a_2^l, \omega^l$  bzw.  $a_1^r, a_2^r, \omega^r$ . Wird  $k$  auf dem Wege  $AB$  überschritten, so erhält man nach (2, 7) die Dyname

$$K_3 = w^l - w^r; \quad M_1^{(0)} = a_1^l - a_1^r; \quad M_2^{(0)} = a_2^l - a_2^r. \quad (6, 2)$$

Ihre Reduktion vom Anfangspunkt weg auf einen Punkt  $D$  von  $k$  möge dort die Komponenten  $Q = K_3, M_1$  und  $M_2$  ergeben. Dieses Ergebnis ist folgendermaßen zu deuten:  $k$  ist ein dünner gekrümmter materieller Stab, der auf Schub, Biegung und Torsion beansprucht wird.  $Q$ , die relative Drehung des rechten und linken Bereiches, ist die Querkraft. Die Summe der Projektionen von  $M_1$  und  $M_2$  auf die Tangente von  $K$ , also der relative Verschiebungssprung in Tangentenrichtung, ist das Torsionsmoment, und ganz entsprechend erscheint das Biegemoment als relativer Verschiebungssprung in Normalenrichtung.

<sup>11</sup> A. Seeger: Theorie der Gitterfehlstellen. Handbuch der Physik (Encycl. of Physics), Bd. VII, Teil 1. 1955.

Bei einem ebenen geschlossenen Rahmen sind die Schraubungskomponenten seines inneren Bereiches die drei Parameter seiner  $\infty^3$  Eigenspannungszustände, und Entsprechendes gilt für mehrfeldrige Rahmentragwerke. Offenbar handelt es sich hier nur um diejenigen Eigenspannungszustände, die geweckt werden, wenn das Tragwerk senkrecht zu seiner Ebene belastet ist.

Gleichlaufende Betrachtungen bei der Airyschen Spannungsfunktion sind schon vor Jahrzehnten von P. Funk angestellt worden<sup>12</sup>. Dabei handelt es sich um dreiparametrische infinitesimale Verschiebungen starrer Bereiche in  $x_3$ -Richtung, die den Eigenspannungszuständen des in seiner Ebene belasteten Tragwerkes zuzuordnen sind. Die sehr anschaulichen und ausführlichen Funkschen Darstellungen können das Vorbild sein für eine entsprechend eingehende Auswertung unserer obigen knappen Betrachtungen.

Der Rahmen in Abb. 7 möge als Beispiel eines statisch unbestimmten Systems kurz besprochen werden. Der geschlossene Rahmen ist mit zwei Stäben rechts und links verbunden, und durch das ganze Stabwerk soll ein Torsionsmoment  $T$  geleitet werden. Die geometrische Konfiguration der Abb. 7 teilt die Ebene in drei Bereiche, den oberen, den unteren und den inneren. Zunächst wird der innere Bereich herausgehoben, dann der untere am oberen vorbeigezogen um eine Strecke, die dem Torsionsmoment entspricht. Das jetzt entstandene achteckige Loch muß mit dem vorher herausgenommenen Ebenenstück bedeckt werden. Im Sinne des Satzes von Castigliano hat dies so zu geschehen, daß die Summe der (mit elastischen Gewichten versehenen) Quadrate der relativen Verschiebungskomponenten in tangentialer und normaler Richtung, integriert über die vier Stäbe des Rahmens, einen Kleinstwert hat. Obwohl man diese Forderung präzise nur auf rechnerischem Wege erfüllen kann, vermittelt die Abb. 7 doch schon einen Überblick über die Beanspruchung des Rahmens. Die Drehung des Innenfeldes muß aus Symmetriegründen um  $E$  stattfinden, und mit dem Drehwinkel sind Querkraft und Torsionsmoment (Strecke  $FG$ ) in den Punkten  $C$  und  $D$  bestimmt. Die Aufgabe ist deshalb einfach statisch unbestimmt.

Wir beschließen unsere Ausführungen mit einer kurzen Betrachtung der Belastung des Stabwerkes durch Einzelkräfte senkrecht zu seiner Ebene. Das einer solchen Kraft oder allgemeiner: Dyname entsprechende „Verschiebungsfeld“ machen wir eindeutig durch Zerschneiden der Ebene längs des Stabes, an dem die Kraft angreift. Die Differenz der Verschiebungswerte auf beiden Seiten des Stabes (auch Randwerte der Spannungsfunktionen der zu einem Stab entarteten Platte) ist der für die Dyname charakteristische Verschiebungssprung, nämlich das Momentenfeld der Dyname längs des Stabes. Die unbeanspruchten Bereiche der Ebene außerhalb des Stabes seien verschiebungsfrei. Wir kommen so zu der Vorstellung, daß die geometrische Linie von der Gestalt des Stabes aus dem Stab heraus über die ruhende Ebene hinweg verschoben wird, derart, daß ihre Verschiebungsvektoren mit dem Momentenfeld der Dyname identisch sind. Bequemer noch ist die Vorstellung, daß der Stab selbst verschoben wird. Ist der Stab mit mehreren Einzelkräften belastet, so ist jedem Kraftangriffspunkt ein Zylindergelenk in  $x_3$ -Richtung zuzuordnen (beim Angriff von Momenten sind es Verschiebungssprünge), und die Größe der relativen Gelenkdrehung ist ein Maß der Kraft. Auf diese Weise kommt man zu den Verschiebungen einer Gelenkkette, einer Verallgemeinerung der Seileckskonstruktion, wie man sie bei Kräften anwendet, die sämtlich in einer Ebene liegen. So entspricht z. B. jedem infinitesimalen Verschiebungszustand eines Vierecksystems ein Gleichgewichtssystem von vier Kräften, die in den vier steifen Ecken eines Rahmens, senkrecht zur Rahmen-ebene, angreifen. Der Verschiebungszustand der vier Stäbe des Vierecksystems liefert

<sup>12</sup> P. Funk: Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Berlin. 1920.



dabei die Beanspruchung des Rahmens, die im allgemeinen allerdings nur einem Lastspannungszustand entspricht. Erst eine geeignete Überlagerung mit Eigen Spannungszuständen, dargestellt durch die  $\infty^3$  Verschiebungszustände des erstarrten Viereckes im Sinne des Satzes von Castigliano, liefert die tatsächliche Beanspruchung des Rahmens<sup>13</sup>.

So wird die Statik des ebenen und senkrecht zu seiner Ebene belasteten Stabwerkes auf die Kinematik ebener Gelenkssysteme abgebildet.

<sup>13</sup> Solche Analogien sind natürlich nicht unbemerkt geblieben. In der Arbeit von Q. E. Hay und W. Prager: On plane rigid frames loaded perpendicularly to their plane, Quart. Appl. Math. 1 (1943), wird diese Analogie für den einfeldrigen Rahmen dargestellt, allerdings ohne Beziehung zu Spannungsfunktionen. Dort wird ferner gezeigt, wie man durch Verbindung dieser Analogie mit der Mohrschen Analogie für gekrümmte Balken sehr einfache Berechnungsverfahren für statisch unbestimmte Rahmen erhält.

(Eingegangen am 24. März 1956)

## Bemerkungen zum Stefanschen Problem

Von F. Selig, Wien

**Zusammenfassung.** Das Stefansche Problem wird für den Fall variabler Randtemperatur untersucht. Diskutiert werden zwei Problemstellungen: Randtemperatur gegeben und Wanderungsgeschwindigkeit gesucht; vorgegebene Wanderungsgeschwindigkeit und Bestimmung der zugehörigen Randtemperatur.

### Problemstellung

J. Stefan hat 1889<sup>1</sup> folgendes Problem gelöst: Ein in der positiven  $x$ -Achse liegendes Eisprisma von der Temperatur  $0^\circ$  werde an  $x = 0$  zur Zeit  $t = 0$  mit einer konstanten Temperatur  $T = T_0 > 0$  in Berührung gebracht. Hierdurch beginnt die Grenze zwischen Eis und dem entstehenden Schmelzwasser in der positiven  $x$ -Richtung zu wandern. Die Lokalisierung dieser Grenze und die Bestimmung der Temperaturverteilung im Wasserprisma wird als das Stefansche Problem bezeichnet.

Da der Dichteunterschied zwischen Eis und Wasser vernachlässigt wird, das heißt die Querschnitte der beiden Prismen als gleich angesehen werden, gilt für die Temperaturverteilung im Wasser

$$T_t = a^2 T_{xx}, \quad (1)$$

deren Gültigkeitsbereich sich entsprechend der Verschiebung der Grenzfläche verändert. Der Mantel des Prismas wird als wärmeisolierend betrachtet. Abweichend von der ursprünglichen Fragestellung bei Stefan soll an der Stelle  $x = 0$  eine zeitlich veränderliche Randtemperatur  $\varphi(t)$  vorgeschrieben werden<sup>2</sup>. Somit gelten für (1) folgende Bedingungen:

$$T(x, 0) = 0, \quad (2a)$$

$$T(0, t) = \varphi(t). \quad (2b)$$

An der Grenzfläche, die vom Ursprung die Entfernung  $x_1(t)$  habe, muß die Temperatur naturgemäß  $0^\circ$  betragen, also

$$T(x_1(t), t) = 0. \quad (2c)$$

<sup>1</sup> J. Stefan: Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung. S. B. Wien. Akad. Wiss., Abt. IIa 98 (1889).

<sup>2</sup> Vgl. etwa auch J. Douglas jr. und T. M. Gallie jr.: Numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition. Vortragsbericht vom Summer Meeting in Ann Arbor, Bull. of the Amer. math. Soc., t. 61 (1955). (Stellt eine numerische Methode dar, die auf der Ersetzung der Differentialquotienten durch die entsprechenden Differenzenquotienten beruht.)

Weiters muß für  $x = x_1(t)$  beachtet werden, daß die in der Zeit  $dt$  durch die Flächeneinheit zuströmende Wärme  $-\kappa \frac{\partial T}{\partial x} dt$  gleich sein muß der zum Schmelzen eines Zylinders über der Flächeneinheit und der Höhe  $dx$  benötigte Schmelzwärme  $\lambda dx$ . Hierbei bedeuten  $\kappa$  die Wärmeleitfähigkeit des Wassers und  $\lambda$  die Schmelzwärme des Eises. Dies liefert die Bedingung an  $x = x_1(t)$

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{dx}{dt}. \quad (2d)$$

### Lösungsgang

Zur Lösung dieser Aufgabe wird ein Ersatzproblem formuliert, das dem bewegten Rand durch Einführung einer geeigneten Quellverteilung im unendlich langen, homogenen Wasserprisma gerecht wird. Dies erreicht man mittels einer wandernden Flächenquelle an  $x = x_1(t)$ , deren Quellstärke entsprechend (2d) angesetzt wird<sup>3</sup>. Demnach erhält man für das Ersatzproblem unter Verwendung der Diracschen  $\delta$ -Funktion

$$\vartheta_t = a^2 \vartheta_{xx} - \lambda \frac{dx}{dt} \delta(x - x_1(t)) \quad (3)$$

mit

$$\vartheta(x, 0) = 0, \quad (3a)$$

$$\vartheta(0, t) = \varphi(t) \quad (3b)$$

und hinreichend schnellem Verschwinden von  $\vartheta$  mit  $x \rightarrow \infty$  und ferner

$$\vartheta(x_1(t), t) = 0. \quad (3c)$$

Da (3) für  $0 < x < x_1(t)$  mit (1) identisch ist und da  $\vartheta$  auch die zu (2abcd) analogen Bedingungen erfüllt, so ist für  $0 < x < x_1(t)$

$$\vartheta = T.$$

Eine Lösung von (3), die für  $x = 0$  den Wert 0 annimmt und den beiden anderen Bedingungen genügt, gewinnt man durch Anwendung der unendlichen Sinus-Transformation auf (3)

$$\vartheta_1(x, t) = -\frac{\lambda}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dx_1}{dt} \left( e^{-\frac{[x-x_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{[x+x_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (4)$$

Zur Erfüllung von (3b) muß zu  $\vartheta_1(x, t)$  eine Lösung der homogenen Gleichung von (3) addiert werden, die allen geforderten Bedingungen genügt. Diese erhält man mittels der Laplace-Transformation unter Verwendung des Faltungssatzes

$$\vartheta_2(x, t) = \int_0^t \psi(\tau) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau \quad (5)^4$$

mit

$$\psi(t) = \frac{d\varphi}{dt} \text{ und } \varphi(0) = 0.$$

Aus der Lösung des Ersatzproblems gewinnt man schließlich die Temperaturverteilung im Wasserprisma

$$T(x, t) = \vartheta_1(x, t) + \vartheta_2(x, t). \quad (6)$$

<sup>3</sup> Vgl. auch H. Fieber: Über das Temperaturfeld in längs einer Richtung bewegten und zeitlich veränderlichen Bereichen. Österr. Ingenieur-Arch. dieses Heft.

<sup>4</sup>  $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$  mit  $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$ .

Entsprechend (3c) muß an  $x = x_1(t)$  die Temperatur den Wert 0 annehmen, also

$$\int_0^t \psi(\tau) \operatorname{erfc}\left(\frac{x_1(t)}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau = \frac{\lambda}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\dot{x}_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left( e^{-\frac{[x_1(t)-x_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{[x_1(t)+x_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) d\tau. \quad (7)$$

Bei gegebener Randtemperatur  $\varphi(t)$  stellt (7) die Bestimmungsgleichung für  $x_1(t)$  dar.

Im Spezialfall konstanter Randtemperatur kann sofort das Stefansche Ergebnis bestätigt werden, da die in (7) auftretenden Integrale elementar auswertbar sind. Für  $\psi(t)$  ergibt sich mit

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

die Ableitung der Sprungfunktion

$$\psi(t) = \delta(t)$$

und mit  $x_1(t) = c\sqrt{t}$  folgt

$$\int_0^t \psi(\tau) \operatorname{erfc}\left(\frac{c\sqrt{t}}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau = \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2a}\right).$$

Das Integral auf der rechten Seite ergibt

$$\frac{c\lambda\sqrt{\pi}}{2a} e^{\frac{c^2}{4a^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2a}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{c}{2a}\right)$$

woraus man mit  $\alpha = \frac{c}{2a}$  die Stefansche Bestimmungsgleichung für  $\alpha$

$$\alpha e^{\alpha^2} \int_0^\alpha e^{-x^2} dx = \frac{1}{2\lambda}$$

erhält.

Da bei zeitlich veränderlicher Randtemperatur die Bestimmung von  $x_1(t)$  aus Gl. (7) sehr umständlich erscheint, kann diese Frage im Anschluß an Ljubow<sup>5</sup> vorteilhaft folgendermaßen beantwortet werden: Man transformiert das Intervall  $(0, x_1(t))$  auf  $(0, 1)$  und erhält mittels der Substitution  $\xi = 1 - \frac{z}{x_1(\tau)}$  bei geeignetem Zeitmaßstab eine Differentialgleichung für die dimensionslose Temperatur  $V(\xi, \tau)$ , die an der Stelle  $\xi = 0$  nach Potenzen von  $\xi$  entwickelt wird. Für die zeitabhängigen Koeffizienten ergibt sich eine Rekursionsformel, aus welcher für  $x_1(t)$  eine Reihendarstellung gewonnen werden kann.

Der praktisch bedeutsamere Fall, aus einer vorgegebenen Wanderungsgeschwindigkeit der Grenzfläche (Kristallisationsbedingungen bei der Erstarrung von Schmelzen) die dazu notwendige Randtemperatur zu ermitteln, kann im Anschluß an die Volterrasche Integralgleichung erster Art (7) erledigt werden. Im Falle einer konstanten Wanderungsgeschwindigkeit  $v$  ist die Gleichung

$$\int_0^t \psi(\tau) \operatorname{erfc}\left(\frac{v\tau}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau = \frac{\lambda v}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \left( e^{-\frac{v^2}{4a^2}(t-\tau)} - e^{-\frac{v^2}{4a^2} \frac{(t+\tau)^2}{t-\tau}} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (8)$$

zu behandeln<sup>6</sup>. Die Überführung in das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n \bar{\psi}(t_i) K_v(t_u) = f(t_u)$$

<sup>5</sup> B. Ljubow: Berechnung der Geschwindigkeit der Verfestigung eines Metallbarrens. Doklady Acc. Nauk 68 (1949).

<sup>6</sup> Eine Näherungsmethode für den allgemeinen Fall wird an anderer Stelle vgl. I. c. 3 näher besprochen.



mit

$$K_\nu(t_n) = \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \operatorname{erfc} \left( \frac{v t_n}{2a \sqrt{t_n - \tau}} \right) d\tau = \frac{v t_n}{2a} \left[ \sqrt{t_n - \tau} e^{-\frac{v^2}{4a^2} \frac{t_n^2}{t_n - \tau}} + \right. \\ \left. + \left( \frac{v t_n \sqrt{\pi}}{a} + \frac{2a \sqrt{\pi}}{v} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{v t_n}{2a \sqrt{t_n - \tau}} \right) \right] \Bigg|_{\tau=t_{\nu-1}}^{\tau=t_\nu} + \tau \operatorname{erfc} \left( \frac{v t_n}{2a \sqrt{t_n - \tau}} \right) \Bigg|_{\tau=t_{\nu-1}}^{\tau=t_\nu}$$

und dem ausgewerteten Integral der rechten Seite

$$f(t_n) = \frac{\lambda}{2} \left[ e^{\frac{2}{a^2} t_n} \operatorname{erfc} \left( \frac{3v}{2a} \sqrt{t_n} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{v}{2a} \sqrt{t_n} \right) + 2 \operatorname{erf} \left( \frac{v}{2a} \sqrt{t_n} \right) \right]$$

gestattet,  $\psi(t)$  als Treppenfunktion zu ermitteln.  $\psi(t_\nu)$  ist die Ordinate der Treppenfunktion im Intervall  $(t_{\nu-1}, t_\nu)$ . Mit der Anfangsbedingung für  $\varphi(t)$  folgt durch graphische Integration angenähert der zeitliche Verlauf der Randtemperatur.

(Eingegangen am 7. März 1956)

(Institut für theoretische Physik der Universität Wien)

## Zur systematischen Integration der Laplaceschen Differentialgleichung

Von Th. Sexl

**Zusammenfassung.** Als kanonisches Fundamentalsystem für  $x = 0$  kann genommen werden:

1. Für nicht ganzzahlige  $\delta_1$ : entweder  $y_1$  und  $y_2$  oder  $G$  und  $G_1$ , berechnet unter II, A.
2. Für ganzzahlige  $\delta_1 \leq 1$ : entweder  $y_1$  und  $y_2$  oder  $G_1$  und  $H$ , berechnet unter II, B.
3. Für ganzzahlige  $\delta_1 > 1$ : entweder  $y_1$  und  $y_2$  oder  $G$  und  $J$ , berechnet unter II, C.

Die bei vielen Problemen der theoretischen Physik (Stabilitätsproblem der Poiseuilleschen Strömung in der Hydrodynamik, Wasserstoffproblem der Wellenmechanik, Theorie der Nukleonenstreuung in der Kernphysik) auftretende Laplacesche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \delta_0 + \frac{\delta_1}{x} \right) \frac{dy}{dx} + \left( \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{x} \right) y = 0,$$

in der die unabhängige Veränderliche  $x$  und die vier Parameter  $\delta_0, \delta_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1$  als komplexe Größen vorausgesetzt werden sollen, kann mit Hilfe der Laplaceschen Transformation integriert werden. Zu diesem Zweck macht man den Ansatz

$$y(x) = \int_C w(z) e^{xz} dz,$$

wobei der Integrationsweg  $C$  in der Ebene der komplexen Veränderlichen  $z$  geeignet zu bestimmen sein wird und  $w(z)$  eine neue unbekannte Funktion an Stelle der alten unbekannten Funktion  $y(x)$  bedeutet. Geht man mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhält man nach kurzer Zwischenrechnung

$$\int_C \frac{d}{dz} \{ (z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0) w e^{xz} \} dz - \int_C \left\{ \frac{dw}{dz} (z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0) - w [z(\delta_1 - 2) - \delta_0 + \varepsilon_1] \right\} e^{xz} dz = 0.$$

Das erste Integral ist der Differenz der Funktionswerte des Klammerausdrucks am Ende und Anfang des Weges  $C$  gleich und verschwindet daher, wenn die Werte des Klammerausdruckes am Anfang und Ende dieselben sind. Damit das zweite

Integral verschwindet, setzt man den Integranden identisch gleich Null und erhält dadurch eine Differentialgleichung erster Ordnung für  $w$

$$(z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0) \frac{dw}{dz} - w [z(\delta_1 - 2) - \delta_0 + \varepsilon_1] = 0,$$

deren Lösung sich aus

$$\frac{dw}{w} = \frac{z(\delta_1 - 2) - \delta_0 + \varepsilon_1}{z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0} dz = \left( \frac{\alpha_1 - 1}{z - c_1} + \frac{\alpha_2 - 1}{z - c_2} \right) dz$$

zu

$$w = (z - c_1)^{\alpha_1 - 1} (z - c_2)^{\alpha_2 - 1}$$

ergibt, wobei eine Integrationskonstante, da nur ein partikuläres Integral gebraucht wird, gleich Null gesetzt wurde. Dabei sind definitionsgemäß  $c_1$  und  $c_2$  die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$O = z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0 = (z - c_1)(z - c_2) = z^2 - (c_1 + c_2)z + c_1 c_2;$$

ferner folgt aus

$$(\alpha_1 - 1)(z - c_2) + (\alpha_2 - 1)(z - c_1) = (\delta_1 - 2)z - \delta_0 + \varepsilon_1,$$

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 c_1}{c_1 - c_2} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 c_2}{c_2 - c_1};$$

weiter sei gleich angemerkt:  $\alpha_1 + \alpha_2 = \delta_1$ .

$w$  ist also eine mehrdeutige Funktion von  $z$  und besitzt in den Punkten  $c_1, c_2$  und  $\infty$  Verzweigungspunkte. Um sie eindeutig zu machen, schneidet man die komplexe  $z$ -Ebene durch Schnitte, die von  $c_1$  bzw.  $c_2$  nach  $\infty$  führen sollen, in geeigneter Weise auf. Um die Bedingung der Gleichheit der Werte des Klammerausdruckes des ersten Integrals am Anfang und Ende des Integrationsweges  $C$  zu erfüllen, komme  $z$  aus dem Unendlichen und gehe auf demselben Wege dorthin zurück, und zwar in solcher Richtung, daß  $e^{xz} \rightarrow 0$  geht, das heißt, daß der Realteil von  $xz$  gegen negativ Unendlich geht. Dazwischen werde im einen Falle die Stelle  $c_1$ , im anderen Falle die Stelle  $c_2$  je einmal umlaufen. Dann erhält man ein erstes Partikularintegral durch

$$y_1(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1} e^{xz} (z - c_1)^{\alpha_1 - 1} (z - c_2)^{\alpha_2 - 1} dz,$$

ein zweites durch

$$y_2(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_2} e^{xz} (z - c_1)^{\alpha_1 - 1} (z - c_2)^{\alpha_2 - 1} dz.$$

Die so gewonnenen Integraldarstellungen der beiden Partikularintegrale  $y_1$  und  $y_2$  würden schon genügen, um daraus in bekannter Weise die insbesondere für die Anwendungen in der theoretischen Physik benötigten asymptotischen Darstellungen von  $y_1$  und  $y_2$  zu gewinnen. Um aber auch die Reihenentwicklungen von  $x = 0$  aus herzuleiten, müssen sie noch umgeformt werden.

Führt man in  $y_1$  die Variable  $v$  durch  $(z - c_1)x = v$  ein, so geht  $y_1$  über in

$$y_1 = e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (c_1 - c_2)^{\alpha_2 - 1} \frac{1}{\pi i} \int_{(-\infty)}^{(0+)} e^v v^{\alpha_1 - 1} \left( 1 + \frac{v}{(c_1 - c_2)x} \right)^{\alpha_2 - 1} dv,$$

wobei der Integrationsweg in der komplexen  $v$ -Ebene eine einfache Schleife aus dem reellen negativ Unendlichen um den Punkt  $v = 0$  bedeutet. Für  $\operatorname{Re}(\alpha_1) > 0$  ist nun das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^v v^{\alpha_1 - 1} \left( 1 + \frac{v}{(c_1 - c_2)x} \right)^{\alpha_2 - 1} dv$$

den in Nullpunkt hinein konvergent. Man kann es daher ersetzen durch

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 e^v v^{\alpha_1-1} \left(1 + \frac{v}{(c_1 - c_2)x}\right)^{\alpha_2-1} dv + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} e^v v^{\alpha_1-1} \left(1 + \frac{v}{(c_1 - c_2)x}\right)^{\alpha_2-1} dv,$$

wobei im ersten Integral  $\arg v = -\pi$ , im zweiten  $\arg v = +\pi$  gilt. Läßt man  $v$  in  $-\infty$  übergehen, so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{\alpha_1-1} \left(1 + \frac{v}{(c_2 - c_1)x}\right)^{\alpha_2-1} (e^{-(\alpha_1-1)\pi i} - e^{+(\alpha_1-1)\pi i}) dv = \\ &= \frac{\sin \pi \alpha_1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{\alpha_1-1} \left(1 + \frac{v}{(c_2 - c_1)x}\right)^{\alpha_2-1} dv = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1-\alpha_1)} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{\alpha_1-1} \left(1 + \frac{v}{(c_2 - c_1)x}\right)^{\alpha_2-1} dv, \end{aligned}$$

wobei der Ergänzungssatz der Gammafunktion  $\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$  benutzt wurde. Das Partikularintegral  $y_1$  wird daher

$$\frac{y_1}{2} = \frac{e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (c_1 - c_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1-\alpha_1)} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{\alpha_1-1} \left(1 + \frac{v}{(c_2 - c_1)x}\right)^{\alpha_2-1} dv.$$

Nun gilt

$$(1+z)^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha-s) \Gamma(s)}{\Gamma(\alpha)} z^{-s} ds;$$

der Integrationsweg von  $-i\infty$  nach  $+i\infty$  ist dabei so gelegt zu denken, daß er die Pole von  $\Gamma(\alpha-s)$  und  $\Gamma(s)$  trennt. Die Richtigkeit dieser Formel ergibt sich sofort, wenn man den Integrationsweg über die Pole von  $\Gamma(s)$  schiebt und beachtet, daß  $\Gamma(s)$  in den Polen  $s = -n$  die Residuen  $\frac{(-1)^n}{n!}$  besitzt. Denn dann erhält man als Wert des Integrals  $2\pi i \sum \text{Res.}$  mit

$$\sum \text{Res.} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} z^n.$$

Setzt man in  $y_1$  ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{2} &= \frac{e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (c_1 - c_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1-\alpha_1)} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{\alpha_1-1-s} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(s) \Gamma(1-\alpha_2-s)}{\Gamma(1-\alpha_2)} \{(c_2 - c_1)x\}^s ds \cdot dv = \\ &= \frac{e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (c_1 - c_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1-\alpha_1) \Gamma(1-\alpha_2)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(s) \Gamma(\alpha_1-s) \Gamma(1-\alpha_2-s) \{(c_2 - c_1)x\}^s ds. \end{aligned}$$

Der Integrationsweg von  $-i\infty$  nach  $+i\infty$  ist dabei so gewählt zu denken, daß er die Pole von  $\Gamma(s)$  und  $\Gamma(\alpha_1-s) \Gamma(1-\alpha_2-s)$  trennt, so daß man von der oben gemachten Voraussetzung  $\text{Re}(\alpha_1) > 0$  unabhängig wird.

Eine ganz analoge Berechnung ergibt für  $y_2$ :

$$\frac{y_2}{2} = \frac{e^{c_2 x} x^{-\alpha_2} (c_2 - c_1)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_2) \Gamma(1-\alpha_2) \Gamma(1-\alpha_1)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(s) \Gamma(\alpha_2-s) \Gamma(1-\alpha_1-s) \{(c_1 - c_2)x\}^s ds.$$



Setzt man für die in den Integranden auftretenden Gammafunktionen ihre asymptotischen Näherungen auf den gegen  $\pm i \infty$  strebenden Wegstücken ein, so ergibt sich als Konvergenzbereich des Integrals in  $y_1$  der Wert  $|\arg(c_2 - c_1)x| < \frac{3\pi}{2}$ , in  $y_2$  der Wert  $|\arg(c_1 - c_2)x| < \frac{3\pi}{2}$ .

### I. Asymptotische Entwicklungen der beiden Integrale $y_1(x)$ und $y_2(x)$ für große Werte der Veränderlichen

Schiebt man den Integrationsweg über die Pole von  $\Gamma(s)$ , so erhält das Integral nach dem Cauchyschen Satz den Wert  $2\pi i \sum \text{Res.}$ , also wird für  $|\arg(c_2 - c_1)x| < \frac{3\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{2} &\cong \frac{e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (c_1 - c_2)^{\alpha_2 - 1}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(\alpha_1 + n) \Gamma(1 - \alpha_2 + n) \{(c_2 - c_1)x\}^{-n} = \\ &= e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (c_1 - c_2)^{\alpha_2 - 1} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_1)} {}_2F_0\left(1 - \alpha_2, \alpha_1; \frac{1}{(c_1 - c_2)x}\right), \end{aligned}$$

wobei nach Pochhammer und Barnes definitionsgemäß

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{n! (\beta_1)_n (\beta_2)_n \dots (\beta_q)_n} x^n$$

mit  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$  und  $(\alpha)_0 \equiv 1$  gilt.

In analoger Weise folgt für  $|\arg(c_1 - c_2)x| < \frac{3\pi}{2}$

$$\frac{y_2}{2} \cong e^{c_2 x} x^{-\alpha_2} (c_2 - c_1)^{\alpha_1 - 1} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_2)} {}_2F_0\left(1 - \alpha_1, \alpha_2; \frac{1}{(c_2 - c_1)x}\right).$$

### II. Reihenentwicklungen der beiden Integrale $y_1(x)$ und $y_2(x)$ für beliebige Werte von $x$

#### A. $\alpha_1 + \alpha_2 = \delta_1 =$ keine ganze Zahl

Schiebt man zweitens den Integrationsweg über die Pole von

$$\Gamma(\alpha_1 - s) \Gamma(1 - \alpha_2 - s),$$

so erhält das Integral den Wert  $-2\pi i \sum \text{Res.}$ , wobei das Minuszeichen davon herrührt, daß die Pole jetzt im negativen Sinne umlaufen werden.  $\Gamma(\alpha_1 - s)$  besitzt die Pole  $s = \alpha_1 + n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ );  $\Gamma(1 - \alpha_2 - s)$  die Pole  $s = 1 - \alpha_2 + n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ). Ist  $\alpha_1 + \alpha_2 = \delta_1 =$  keine ganze Zahl, so sind alle Pole einfach. Man erhält daher unmittelbar

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{2} &= \frac{e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (c_1 - c_2)^{\alpha_2 - 1}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_2)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(\alpha_1 + n) \Gamma(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - n) \{(c_2 - c_1)x\}^{\alpha_1 + n} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(1 - \alpha_2 + n) \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 - 1 - n) \{(c_2 - c_1)x\}^{1 - \alpha_2 + n} \right\} \end{aligned}$$

oder, da nach dem Ergänzungssatz der Gammafunktion

$$\Gamma(1 - \alpha - n) = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha + n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{(\alpha)_n},$$

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{2} &= C_1 e^{c_1 x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n}{n! (\delta_1)_n} \{(c_2 - c_1)x\}^n + C_2 \frac{e^{c_1 x} x^{1 - \delta_1}}{\Gamma(2 - \delta_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 - \delta_1 + 1)_n}{n! (2 - \delta_1)_n} \{(c_2 - c_1)x\}^n \equiv \\ &\equiv C_1 G + C_2 G_1 \end{aligned}$$

mit 
$$C_1 = \frac{(c_1 - c_2)^{\delta_1 - 1} e^{\pm i\pi\alpha_1} \Gamma(1 - \delta_1)}{\Gamma(1 - \alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_2)} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{\sin \pi \alpha_1 \cdot e^{\mp i\pi\alpha_2}}{\sin \pi \delta_1},$$

wobei das obere Zeichen in  $C_{1,2}$  für  $0 < \arg(c_2 - c_1) x \leq \pi$ , das untere Zeichen für  $-\pi < \arg(c_2 - c_1) x \leq 0$  gilt.

Eine analoge Berechnung für  $y_2$  ergibt

mit 
$$\frac{y_2}{2} = -C_1 G + (1 - C_2) G_1$$

$$1 - C_2 = \frac{\sin \pi \alpha_2 \cdot e^{\pm i\pi\alpha_1}}{\sin \pi \delta_1}.$$

$G \equiv e^{c_1 x} {}_1F_1(\alpha_1; \delta_1; (c_2 - c_1)x)$  stellt das ganze transzendente Integral der Laplaceschen Differentialgleichung dar, während

$$\Gamma(2 - \delta_1) G_1 \equiv e^{c_1 x} x^{1-\delta_1} {}_1F_1(\alpha_1 + 1 - \delta_1; 2 - \delta_1; (c_2 - c_1)x)$$

eine mit  $x^{1-\delta_1}$  multiplizierte ganze transzendente Funktion bedeutet in Einklang mit der Tatsache, daß die determinierende Fundamentalgleichung der Laplaceschen Differentialgleichung für die Stelle der Bestimmtheit (außerwesentlich singuläre Stelle)  $x = 0$ , nämlich  $\varrho(\varrho - 1) + \delta_1 \varrho = 0$ , die beiden Wurzeln 0 und  $1 - \delta_1$  besitzt.  $G_1$  ist also, im Gegensatz zur eindeutigen ganzen Transzendenten  $G$ , eine mehrdeutige Funktion von  $x$ . Um sie eindeutig zu machen, schneidet man die komplexe  $x$ -Ebene in geeigneter Weise auf. Mit Rücksicht auf die in den Anwendungen meist verlangten Realitätsverhältnisse wählt man denjenigen Zweig als „Hauptzweig“ aus, der durch die Ungleichung  $-\pi < \arg x \leq +\pi$  definiert ist, führt also den Verzweigungsschnitt in der komplexen  $x$ -Ebene längs der negativen reellen Achse von 0 nach  $-\infty$ . Auf Grund der „Umlaufsrelation“  $G_1(x \cdot e^{2n\pi i}) = e^{2n\pi i(1-\delta_1)} G_1(x)$  kann man übrigens den Wertevorrat jedes beliebigen Zweiges mit Hilfe desjenigen des Hauptzweiges darstellen.

Aus den beiden grundlegenden Relationen

$$\frac{y_1}{2} = C_1 G + C_2 G_1,$$

$$\frac{y_2}{2} = -C_1 G + (1 - C_2) G_1$$

folgt das ganze transzendente Integral  $G$  in der Form

$$G = \frac{1 - C_2}{C_1} \frac{y_1}{2} - \frac{C_2}{C_1} \frac{y_2}{2} =$$

$$= \frac{\Gamma(1 - \alpha_1) \Gamma(\delta_1)}{\Gamma(\alpha_2) (c_1 - c_2)^{\delta_1 - 1}} \frac{y_1}{2} + \frac{\Gamma(1 - \alpha_2) \Gamma(\delta_1)}{\Gamma(\alpha_1) (c_2 - c_1)^{\delta_1 - 1}} \frac{y_2}{2}$$

mit der asymptotischen Entwicklung

$$G \cong \frac{\Gamma(\delta_1)}{\Gamma(\alpha_2)} e^{c_1 x} \{(c_1 - c_2)x\}^{-\alpha_1} \cdot {}_2F_0\left(1 - \alpha_2, \alpha_1; \frac{1}{(c_2 - c_1)x}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\delta_1)}{\Gamma(\alpha_1)} e^{c_2 x} \{(c_2 - c_1)x\}^{-\alpha_2} \cdot {}_2F_0\left(1 - \alpha_1, \alpha_2; \frac{1}{(c_2 - c_1)x}\right).$$

Aus den gleichen Relationen ergibt sich das mehrdeutige Integral  $G_1$  in der Form

$$G_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

mit der asymptotischen Entwicklung

$$G_1 \cong e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (c_1 - c_2)^{\alpha_1 - 1} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_1)} \cdot {}_2F_0\left(1 - \alpha_2, \alpha_1; \frac{1}{(c_1 - c_2)x}\right) +$$

$$+ e^{c_2 x} x^{-\alpha_2} (c_2 - c_1)^{\alpha_2 - 1} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_2)} \cdot {}_2F_0\left(1 - \alpha_1, \alpha_2; \frac{1}{(c_2 - c_1)x}\right).$$

Da die Transformationsdeterminante von  $y_1$  und  $y_2$  in  $G$  und  $G_1$ , nämlich

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ -C_1 & 1 - C_2 \end{vmatrix} = C_1,$$

für positiv ganzzahliges  $\alpha_1$  oder positiv ganzzahliges  $\alpha_2$  verschwindet, sind diese Fälle auszuschließen.

B.  $\alpha_1 + \alpha_2 = \delta_1 = \text{ganze Zahl} \leq 1$ .

Ist  $\alpha_1 + \alpha_2 = \delta_1$  eine ganze Zahl, so wird im Falle  $\delta_1 \leq 1$   $\alpha_1 + n$  für  $n = g$  gleich  $1 - \alpha_2$ , wenn man die ganze nicht negative Zahl  $1 - \alpha_1 - \alpha_2 = g$  nennt. Es sind also dann bloß  $\alpha_1, \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_1 + g - 1$  einfache Pole, während  $\alpha_1 + g = 1 - \alpha_2$ ,  $1 - \alpha_2 + 1, \dots$  zweifache Pole darstellen. Für die einfachen Pole wird

$$\begin{aligned} - \sum \text{Res.} &= - \sum_{n=0}^{g-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \Gamma(\alpha_1 + n) \Gamma(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - n) \{(c_2 - c_1) x\}^{\alpha_1 + n} = \\ &= \{(c_2 - c_1) x\}^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{g-1} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n) \Gamma(g - n)}{n!} \{(c_1 - c_2) x\}^n = \\ &= \frac{(-1)^{g+1} \Gamma(1 - \alpha_2)}{g!} \{(c_2 - c_1) x\}^{1 - \alpha_2} \cdot \\ &\quad - g! (g - 1)! \frac{\{(c_2 - c_1) x\}^{-g}}{(\alpha_2)_g} \sum_{n=0}^{g-1} \frac{(\alpha_1)_n}{n! (1 - g)_n} \{(c_2 - c_1) x\}^n. \end{aligned}$$

Für die zweifachen Pole  $1 - \alpha_2, 1 - \alpha_2 + 1, \dots$  ist die Berechnung der Residuensumme wesentlich komplizierter. Durch zweifache Anwendung des Ergänzungssatzes der Gammafunktion geht der Integrand zunächst über in

$$\frac{\pi^2 \Gamma(s) \{(c_2 - c_1) x\}^s}{\sin \pi (\alpha_1 - s) \cdot \sin \pi (1 - \alpha_2 - s) \cdot \Gamma(1 - \alpha_1 + s) \Gamma(\alpha_2 + s)}.$$

Da  $1 - \alpha_1 - \alpha_2 = g$ , wird  $\alpha_1 = 1 - \alpha_2 - g$ , somit  $\sin \pi (\alpha_1 - s) = (-1)^g \sin (1 - \alpha_2 - s)$ . Aus der bekannten Reihenentwicklung von

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right)$$

(der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß  $n = 0$  auszulassen ist) erhält man durch einmalige Differentiation

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n)^2}.$$

Infolgedessen berechnet sich mit der Abkürzung

$$\frac{\Gamma(s) \{(c_2 - c_1) x\}^s}{(-1)^g \Gamma(1 - \alpha_1 + s) \Gamma(\alpha_2 + s)} = f$$

aus

$$\frac{1}{(s - 1 + \alpha_2 - n)^2} \{f(s)_{s=1-\alpha_2+n} + f'(s)_{s=1-\alpha_2+n} (s - 1 + \alpha_2 - n) + \dots\}$$

das Residuum in den zweifachen Polen  $1 - \alpha_2 + n$  zu

$$\left( \frac{df}{ds} \right)_{s=1-\alpha_2+n}.$$



Für die zweifachen Pole wird somit

$$\begin{aligned}
 - \sum \text{Res.} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{d}{ds} \frac{\Gamma(s) \{(c_2 - c_1)x\}^s}{(-1)^g \Gamma(1 - \alpha_1 + s) \Gamma(\alpha_2 + s)} \right\}_{s=1-\alpha_2+n} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{g+1} \{(c_2 - c_1)x\}^{1-\alpha_2+n} \left\{ \frac{\Gamma(1-\alpha_2+n)}{n! \Gamma(n+2-\delta_1)} \ln(c_2 - c_1)x + \right. \\
 &+ \frac{1}{n! \Gamma(n+2-\delta_1)} \left[ \frac{d}{dz} \Gamma(1-\alpha_2+z) \right]_{z=n} + \frac{\Gamma(1-\alpha_2+n)}{\Gamma(n+2-\delta_1)} \left[ \frac{d}{dz} \frac{1}{\Gamma(z+1)} \right]_{z=n} + \\
 &+ \left. \frac{\Gamma(1-\alpha_2+n)}{n!} \left[ \frac{d}{dz} \frac{1}{\Gamma(2-\delta_1+z)} \right]_{z=n} \right\} = \\
 &= (-1)^{g+1} \{(c_2 - c_1)x\}^{1-\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{(c_2 - c_1)x\}^n \{\ln(c_2 - c_1)x + b_n\};
 \end{aligned}$$

dabei wurde

$$a_n = \frac{(1-\alpha_2)_n \Gamma(1-\alpha_2)}{n! (2-\delta_1)_n \Gamma(2-\delta_1)}$$

$$b_n = \Psi(1-\alpha_2+n) - \Psi(n+1) - \Psi(n+2-\delta_1)$$

gesetzt und die von Gauß eingeführte Funktion

$$\Psi = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

benützt.

Daher wird

$$\begin{aligned}
 \frac{y_1}{2} &= \frac{e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (c_1 - c_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1-\alpha_1) \Gamma(1-\alpha_2)} \left\{ \{(c_2 - c_1)x\}^{\alpha_1} \sum_{x=0}^{g-1} \frac{\Gamma(\alpha_1+n) \Gamma(g-n)}{n!} \{(c_2 - c_1)x\}^n + \right. \\
 &+ (-1)^{g+1} \{(c_2 - c_1)x\}^{1-\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\alpha_2+n)}{n! (n+g)!} \{(c_2 - c_1)x\}^n \{\ln(c_2 - c_1)x + \\
 &+ \left. \Psi(1-\alpha_2+n) - \Psi(n+1) - \Psi(n+g+1)\} \right\}.
 \end{aligned}$$

$y_2$  erhält man daraus, indem man einfach überall den Index 1 durch 2 ersetzt. Definiert man nun eine Funktion  $F_1(\alpha; \gamma; x)$  durch

$$F_1(\alpha; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n! (\gamma)_n} x^n b_n - \frac{g! (g-1)! x^{-g}}{(1-\alpha)_g} \sum_{n=0}^{g-1} \frac{(\alpha-g)_n}{n! (1-g)_n} x^n$$

mit  $b_n = \Psi(\alpha+n) - \Psi(n+1) - \Psi(n+g+1)$  und  $g \equiv \gamma - 1$ , so sieht man unmittelbar, daß  $y_1$  in die Form umgeschrieben werden kann

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \frac{1}{g!} D e^{c_1 x} x^{1-\delta_1} \{ {}_1F_1(\alpha_1 - \delta_1 + 1; 2 - \delta_1; (c_2 - c_1)x) \ln(c_2 - c_1)x + \\
 &+ F_1(\alpha_1 - \delta_1 + 1; 2 - \delta_1; (c_2 - c_1)x) \}
 \end{aligned}$$

mit

$$D = \pm \frac{1 - e^{\pm 2\pi i \alpha_1}}{\pi i} = \frac{-2}{\pi (\text{ctg } \pi \alpha_1 \mp i)},$$

wobei das obere Zeichen in  $D$  für  $0 < \arg(c_2 - c_1)x \leq \pi$ , das untere Zeichen für  $-\pi < \arg(c_2 - c_1)x \leq 0$  gilt.

Addition und Subtraktion von  $G_1$  ergibt schließlich mit der Definition des neuen Integrals  $H$  durch

$$\begin{aligned}
 H \equiv G_1 [\ln(c_2 - c_1)x + \frac{\pi}{2} (\text{ctg } \pi \alpha_1 \mp i)] + \frac{1}{g!} e^{c_1 x} x^{1-\delta_1} F_1(\alpha_1 - \delta_1 + 1; 2 - \\
 - \delta_1; (c_2 - c_1)x)
 \end{aligned}$$

die grundlegende Relation

$$y_1 = G_1 + DH.$$

Dazu kommt durch eine analoge Berechnung

$$y_2 = G_1 - DH.$$

Daraus folgt, wie es sein soll,  $G_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$  und

$$DH = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

mit der asymptotischen Entwicklung

$$DH \cong e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (c_1 - c_2)^{\alpha_1 - 1} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_1)} \cdot {}_2F_0 \left( 1 - \alpha_2, \alpha_1; \frac{1}{(c_1 - c_2)x} \right) - \\ - e^{c_2 x} x^{-\alpha_2} (c_2 - c_1)^{\alpha_2 - 1} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_2)} \cdot {}_2F_0 \left( 1 - \alpha_1, \alpha_2; \frac{1}{(c_2 - c_1)x} \right).$$

Der hier untersuchte Fall  $\alpha_1 + \alpha_2 = \delta_1 \leq 1$  ist physikalisch der wichtigste. Er tritt bei den in der Einleitung genannten physikalischen Problemen auf. Bei dem wellenmechanischen und kernphysikalischen Problem sind der physikalischen Natur nach sämtliche Parameter  $\delta_0, \delta_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1$  und auch die unabhängige Veränderliche  $x$  reell. Da ferner die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung  $c_1$  und  $c_2$  konjugiert komplex sind, müssen es auch die beiden Größen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  und damit auch die beiden Integrale  $y_1$  und  $y_2 (= \bar{y}_1)$  sein. Dann werden aber  $G_1 = \frac{1}{2}(y_1 + \bar{y}_1) = \operatorname{Re}(y_1)$  und  $-i DH = \frac{1}{2i}(y_1 - \bar{y}_1) = \operatorname{Im}(y_1)$  rein reell. Es gilt also dann

$$y_1 = \operatorname{Re}(y_1) + i \operatorname{Im}(y_1) \equiv G_1 + i(-i DH),$$

$$y_2 = \operatorname{Re}(y_1) - i \operatorname{Im}(y_1) \equiv G_1 - i(-i DH).$$

Dem entspricht im asymptotischen Bereich für große Werte der reellen Veränderlichen  $x$  die bekannte Zerlegung von  $e^{\pm i x}$  in  $\cos x \pm i \sin x$ . Im selben asymptotischen Bereich werden also vom physikalischen Standpunkt aus  $G_1$  und  $-i DH$  als stehende Wellen,  $y_1$  und  $y_2$  als vom Ursprung weglauende bzw. einlaufende Wellen zu charakterisieren sein.

Da die Transformationsdeterminante von  $y_1$  und  $y_2$  in  $G_1$  und  $H$ , nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & D \\ 1 & -D \end{vmatrix} = -2D,$$

für ganzzahliges  $\alpha_1$  verschwindet, ist also der Fall, daß  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  selbst ganzzahlig sind, auszuschließen.

C.  $\alpha_1 + \alpha_2 = \delta_1 = \text{ganze Zahl} > 1$ .

Ist  $\alpha_1 + \alpha_2 = \delta_1 > 1$ , so wird, wenn man die ganze positive Zahl  $\alpha_1 + \alpha_2 - 1 = g$  nennt,  $1 - \alpha_2 + n$  für  $n = g$  gleich  $\alpha_1$ . Es sind also jetzt  $1 - \alpha_2, 1 - \alpha_2 + 1, \dots, 1 - \alpha_2 + g - 1$  einfache Pole, während  $1 - \alpha_2 + g = \alpha_1, \alpha_1 + 1, \dots$  zweifache Pole darstellen. Da also  $1 - \alpha_2$  dieselbe Rolle spielt wie früher im Falle B  $\alpha_1$ , braucht man in der dort angegebenen Reihenentwicklung für  $y_1$  in der großen geschweiften Klammer bloß  $\alpha_1$  durch  $1 - \alpha_2$  bzw.  $1 - \alpha_2$  durch  $\alpha_1$  zu ersetzen und findet so:

$$\begin{aligned}
\frac{y_1}{2} &= \frac{e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (c_1 - c_2)^{\alpha_2 - 1}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_2)} \left\{ \{(c_2 - c_1) x\}^{1 - \alpha_2} \sum_{n=0}^{g-1} \frac{\Gamma(1 - \alpha_2 + n) \Gamma(g - n)}{n!} \{(c_2 - c_1) x\}^n + \right. \\
&+ (-1)^{g+1} \{(c_2 - c_1) x\}^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n)}{n! (n + g)!} \{(c_2 - c_1) x\}^n \{\ln(c_2 - c_1) x + \Psi(\alpha_1 + n) - \\
&\quad \left. - \Psi(n + 1) - \Psi(n + g + 1)\} \right\} = \\
&= \frac{(c_1 - c_2)^g \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(1 - \alpha_1)} \frac{1}{2g!} D e^{c_1 x} \{ {}_1F_1(\alpha_1; \delta_1; (c_2 - c_1) x) \ln(c_2 - c_1) x + F_1(\alpha_1; \delta_1; (c_2 - \\
&\quad - c_1) x) \}.
\end{aligned}$$

Definiert man ein neues Integral  $J$  durch

$$J \equiv G [\ln(c_2 - c_1) x + \frac{\pi}{2} (\operatorname{ctg} \pi \alpha_1 \mp i)] + e^{c_1 x} F_1(\alpha_1; \delta_1; (c_2 - c_1) x),$$

so erhält man die grundlegenden Relationen

$$\frac{\Gamma(1 - \alpha_1) g!}{\Gamma(\alpha_2) (c_1 - c_2)^g} y_1 = G + DJ,$$

$$\frac{\Gamma(1 - \alpha_2) g!}{\Gamma(\alpha_1) (c_2 - c_1)^g} y_2 = G - DJ.$$

Daraus ergibt sich

$$G = \frac{\Gamma(1 - \alpha_1) g!}{\Gamma(\alpha_2) (c_1 - c_2)^g} \frac{y_1}{2} + \frac{\Gamma(1 - \alpha_2) g!}{\Gamma(\alpha_1) (c_2 - c_1)^g} \frac{y_2}{2}$$

als Spezialfall der unter A hergeleiteten Beziehung für ganzzahlige  $\delta_1 = g + 1$  und

$$DJ = \frac{\Gamma(1 - \alpha_1) g!}{\Gamma(\alpha_2) (c_1 - c_2)^g} \frac{y_1}{2} - \frac{\Gamma(1 - \alpha_2) g!}{\Gamma(\alpha_1) (c_2 - c_1)^g} \frac{y_2}{2}$$

mit der asymptotischen Entwicklung

$$\begin{aligned}
DJ &\cong \frac{g!}{\Gamma(\alpha_2)} e^{c_1 x} \{(c_1 - c_2) x\}^{-\alpha_1} \cdot {}_2F_0\left(1 - \alpha_2, \alpha_1; \frac{1}{(c_1 - c_2) x}\right) - \\
&- \frac{g!}{\Gamma(\alpha_1)} e^{c_2 x} \{(c_2 - c_1) x\}^{-\alpha_2} \cdot {}_2F_0\left(1 - \alpha_1, \alpha_2; \frac{1}{(c_2 - c_1) x}\right).
\end{aligned}$$

(Eingegangen am 29. Februar 1956)

## Zur graphisch-numerischen Integration eines Simultansystems von gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Von A. Slibar, Wien

Mit 2 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** In der vorliegenden Mitteilung wird das von E. Braun für das Einmassensystem angegebene graphisch-numerische Lösungsverfahren mit dem neueren „Phase-Plane“-Verfahren verglichen und die Braunsche Methode auf ein System mit mehreren Freiheitsgraden angewendet. Die Durchführung der Lösung in den Phaseebenen erlaubt, die den gewählten Wegintervallen entsprechenden Zeitelemente unmittelbar aus dem Geschwindigkeits-Weg-Diagramm abzugreifen.

### I. Einleitung

E. Braun<sup>1</sup> hat zur Behandlung der nichtlinearen Bewegungsgleichung eines Einmassensystems ein Verfahren angegeben, das trotz der Einfachheit seiner Anwen-

<sup>1</sup> E. Braun: Über die graphische Lösung der Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen bei beliebigem Gesetz für Dämpfung, Rückstellkraft und Antriebskraft. Ingenieur-Arch. 7, 198 (1937).



dung und dem guten Näherungsgrad der erzielten Lösungen wenig bekanntgeworden ist. Das Verfahren diene in einer etwas abgewandelten Form zur Behandlung des Wasserschloßproblems mit quadratischem Widerstandsgesetz, ist jedoch auf Differentialgleichungen mit beliebiger Form von Rückstell-, Dämpfungs- und Erregungsfunktion anwendbar.

In der neueren amerikanischen Literatur wurde von L. S. Jacobsen<sup>2</sup> ein Verfahren angegeben, welches — auf den Arbeiten von A. Lienard<sup>3</sup>, J. Lamoën<sup>4</sup> und H. O. Fuchs<sup>5</sup> aufbauend — eine Variation der Braunschen Methode darstellt. Diese als „Phase-Plane-Delta“-Verfahren bezeichnete Methode erlaubt in verschiedenen Fällen einen wesentlichen Teil der Rechenarbeit vor dem eigentlichen graphischen Integrationsprozeß durchzuführen. Die „Phase-Plane-Delta“-Methode macht aber nicht von der Tatsache Gebrauch, daß bei Bestimmung der Lösungskurve in einem Geschwindigkeits-Weg-Diagramm vom unmittelbar vorhergehenden Weg- bzw. Zeitintervall bereits eine, im allgemeinen sogar recht gute Näherung für den Krümmungsradius der Lösungskurve in der Phasenebene bekannt ist. Das „Phase-Plane-Delta“-Verfahren verwendet als Krümmungsmittelpunkt für das anzuschließende Intervall den Schnittpunkt der jeweiligen Kurvennormalen mit der Wegachse. Auf eine Anwendung dieser Methode auf lineare Mehrmassen- und kontinuierliche Systeme sei verwiesen<sup>6</sup>.

Der Verfasser hat mit einem dem Braunschen Verfahren entsprechenden Lösungsweg<sup>7</sup> die Behandlung einer nichtlinearen Mehrmassenanordnung durchgeführt. Dabei wurde aber nicht von einer wesentlichen Vereinfachung zur Bestimmung des Zeitintervalls, welches einem gewählten Wegelement entspricht, Gebrauch gemacht. Diese zweifellos reizvolle Eigenschaft des Braunschen Verfahrens soll, mit einem Vergleich seiner Genauigkeit gegenüber den Ergebnissen der „Phase-Plane-Delta“-Methode, hier kurz für das System mit beliebiger Anzahl von Freiheitsgraden angegeben werden.

## II. Das Verfahren von E. Braun

E. Braun behandelt für das System mit einem Freiheitsgrad die Differentialgleichung<sup>8</sup>

$$\ddot{x} + D(\dot{x}) + R(x) = F(t), \quad (1)$$

welche mit

$$u = F(t) - D(\dot{x}) - R(x) \quad (2)$$

und

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = z \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dt} = u \quad (3)$$

in der Form

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(t) - D(\dot{x}) - R(x)}{z} = \frac{u}{z} \quad (4)$$

geschrieben werden kann.

<sup>2</sup> L. S. Jacobsen: On a General Method of Solving Second-Order Ordinary Differential Equations by Phase-Plane Displacements. J. Appl. Mechan. 1953.

<sup>3</sup> A. Lienard: Étude des oscillations entrainées. Revue Générale d'Electricité, 1928.

<sup>4</sup> J. Lamoën: Étude Graphique des Vibrations de Systèmes à un Seul Degré de Liberté. Revue Universelle des Mines, Mai 1935.

<sup>5</sup> H. O. Fuchs: Spiral Diagrams to Solve Vibration Problems. Product Engineering 7, 294 (1936).

<sup>6</sup> R. S. Ayre: Transient Vibration of Linear Multi-Degree-of-Freedom Systems by the Phase-Plane Method. J. Franklin Inst. 253, 153 (1952).

<sup>7</sup> A. Slibar: Schwingungen von parallel geschalteten bzw. verzweigten Maschinen mit nichtlinearen Gliedern. M. u. W. 6, 21 (1951).

<sup>8</sup> Eine kurze Darstellung des Verfahrens findet sich in E. Kamke: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, S. 178. Leipzig: Akad. Verl., 1943.

In der Abb. 1 liege ein bis zum Punkt  $P$  bekanntes Kurvenstück vor und wir stellen uns die Aufgabe, diese Lösungskurve der Differentialgleichung (1) im Geschwindigkeits-Weg-Diagramm fortzusetzen. Mit dem Punkt  $P_0$  auf dem bekannten Kurvenabschnitt ist auch die Kurvennormale  $P_0 N_0$  und am Ende  $P$  dieses letzten bekannten Wegintervalles die im Punkte  $P$  errichtete Normale  $PN$  mit Hilfe von Gl. (2) gegeben. Im Schnittpunkt  $K_0$  dieser beiden Normalen ist aber bereits eine gute Näherung der

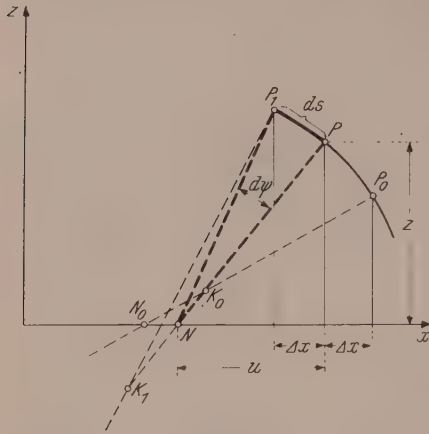


Abb. 1.

Allgemeines Schema des Verfahrens

Zeitintervall durch den in Abb. 1 mit  $d\psi$  bezeichneten Winkel zu messen und zur Durchführung des nächsten Integrationsschrittes, das heißt zur Bestimmung des neuen Wertes von  $u$  nach Gl. (2) zu verwenden.

In der Braunschen Arbeit wird die zu den Gl. (6) führende Überlegung als streng angenommen, sie stellt jedoch — da die Strecke  $\overline{NP}$  als angenäherter Krümmungsradius verwendet wird — nur eine Näherung zur Darstellung des Bogenelementes  $ds$  dar. Die Güte dieser Näherung kann aber für die einzelnen Integrationsschritte laufend leicht überprüft werden, wozu lediglich der Vergleich der Längen der beiden Strecken  $\overline{PN}$  und  $\overline{PK}_1$  in Abb. 1 erforderlich ist. Im Gegensatz zum Braunschen Verfahren gilt die zu den Gl. (6) führende Überlegung beim „Phase-Plane-Delta“-Verfahren streng, da ja der Schnittpunkt  $N$  der Normalen mit der Abszissenachse willkürlich als der neue Krümmungsmittelpunkt gewählt wurde. In allen Fällen, in denen jedoch  $\overline{PN} \approx \overline{PK}_1$  gilt, wird die Näherung nach Gl. (6) bei Anwendung des Braunschen Verfahrens jedoch Werte liefern, die — innerhalb der Zeichengenauigkeit — als streng angesprochen werden können. Weiters ist wesentlich, daß der im Zeitintervall  $dt$  enthaltene Fehler sich lediglich in der Bestimmung des neuen Wertes von  $F(t)$  auswirken wird, während die Funktionen  $D(\dot{x})$  und  $R(x)$  genau bis auf Glieder zweiter Kleinheitsordnung bestimmt sind.

### III. Erweiterung auf ein System mit mehreren Freiheitsgraden

Das Braunsche Verfahren läßt sich in einfacher Weise auf ein System von gewöhnlichen, simultanen Differentialgleichungen übertragen.

Das zu behandelnde System sei in der Form

$$\ddot{x}_i - u_i(x_k, \dot{x}_k, t) = 0, \quad k = 1, \dots, i, \dots, n \quad (7)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x_{k0} = x_k(t_0), \quad \dot{x}_{k0} = \dot{x}_k(t_0), \quad k = 1, \dots, i, \dots, n \quad (8)$$

Lage des Krümmungsmittelpunktes und in der Strecke  $PK_0$  ein Näherungswert des Krümmungshalbmessers für das zu bestimmende, von  $P$  aus anzuschließende Intervall bekannt. Bezeichnen wir das vom Krümmungsmittelpunkt  $K_0$  aus gezeichnete Bogenstück mit  $ds$  (Abb. 1), so folgt aus den Gl. (3) unmittelbar

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = z^2 + u^2 \quad \text{bzw.} \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{z^2 + u^2}} \quad (5)$$

und damit in Verbindung mit guter Näherung aus Abb. 1

$$ds = \overline{NP} \cdot d\psi \quad \text{bzw.} \quad d\psi = \frac{ds}{\overline{NP}} = dt. \quad (6)$$

Die Darstellung in der durch das  $z-x$ -Koordinatensystem bestimmten Phaseebene erlaubt also, das dem gewählten Wegelement entsprechende





# Der Tages- und Jahresgang der auf die horizontale Ebene und auf verschieden orientierte senkrechte Wände einfallenden Intensität der Sonnenstrahlung in verschiedenen Höhenlagen in Österreich

(Ein Beitrag zur Kenntnis der Besonnung von Bauwerken)

Von F. Steinhauser, Wien

Mit 1 Textabbildung

**Zusammenfassung.** Auf Grund von zahlreichen Strahlungsbeobachtungen aus verschiedenen Gebieten der Alpen werden mittlere Tagesgänge der Bestrahlung einer waagrechten Fläche, einer Südwand, einer Nordwand und einer Ostwand für wolkenlose Tage, bezogen auf die Mitte eines jeden Monats, für 200, 1000, 2000 und 3000 m Seehöhe abgeleitet. Die Änderungen der Form dieser Tagesgänge im Laufe des Jahres und mit der Seehöhe werden diskutiert. Bemerkenswert ist bei den Tagesgängen der Bestrahlung der Ostwand, daß nicht nur die Intensitäten unmittelbar nach Sonnenaufgang rasch ansteigen und mit der Höhe stark zunehmen, sondern daß sich auch die Eintrittszeiten der Strahlungsmaxima mit der Höhe verfrühen. Aus den Tagesgängen werden für die gleichen Seehöhen und für die Mitte jeden Monats Tagessummen der Bestrahlung der erwähnten Flächen an wolkenlosen Tagen berechnet. Die Besonderheiten dieser Jahresgänge werden besprochen. Hervorgehoben sei, daß bei der Bestrahlung der Südwand die Maxima auf Februar und Oktober fallen und daß die Bestrahlung dieser Wand im Winter bedeutend größer ist als im Sommer, was besonders für die Praxis zu berücksichtigen ist.

In der Gegenwart wird viel von den Möglichkeiten der technischen Ausnutzung der Sonnenenergie gesprochen und vor kurzem waren die einschlägigen Probleme sogar Gegenstand einer internationalen Tagung. Während die technische Ausnutzung der Sonnenstrahlung zur Energiegewinnung im großen vor allem nur in bestimmten strahlungsbegünstigten Zonen niedriger geographischer Breiten in Betracht gezogen werden könnte und unter den geographischen und klimatischen Verhältnissen Mitteleuropas sich kaum oder nur wenig Auswertungsmöglichkeiten bieten dürften, muß aber die Architektur und Bautechnik auch in unseren Gebieten bei ihren Planungen die Strahlungsverhältnisse, und zwar die Intensität der Gesamtstrahlung wie auch die Lichtwirkung, in Betracht ziehen und hat dies auch vielfach getan. Für eine richtige Verwertung und Berücksichtigung der Strahlungsverhältnisse sind aber quantitative Angaben Voraussetzung. Solche müßten für verschiedene Tages- und Jahreszeiten verlangt werden, um alle Variationen erfassen zu können. In einem Gebirgslande wie Österreich spielt gerade bei den Strahlungsverhältnissen auch die Höhenabhängigkeit eine große Rolle. In einer früheren Arbeit habe ich aus den zahlreichen Strahlungsmessungen aus verschiedenen Gebieten der Niederung und der Alpen Durchschnittswerte für Tagesgang, Jahresgang und Höhenabhängigkeit der Intensität der auf eine Meßfläche senkrecht auffallenden Sonnenstrahlung abgeleitet<sup>1</sup>. Die Richtigkeit dieser Werte konnten bei späteren Untersuchungen wiederholt bestätigt werden<sup>2</sup>. Die Werte gelten naturgemäß für wolkenlose Tage und stellen demnach Höchstwerte der praktischen Verwertung dar. Einen gewissen Einblick, in welchem Ausmaß in den einzelnen Teilgebieten mit diesen Werten zu rechnen ist, kann man aus Karten der Sonnenscheindauer in Österreich gewinnen, die die Verteilung der Sonnenscheindauer in Prozenten der möglichen Dauer für die einzelnen Jahreszeiten zur Darstellung bringen<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> F. Steinhauser: Die Zunahme der Intensität der direkten Sonnenstrahlung mit der Höhe im Alpengebiet und die Verteilung der „Trübung“ in den unteren Luftschichten. Meteorol. Z. 56, 172 (1939).

<sup>2</sup> F. Sauberer: Zur Abschätzung der Globalstrahlung in verschiedenen Höhenstufen der Ostalpen. Wetter u. Leben 7, 22 (1955).

<sup>3</sup> F. Steinhauser: Die Verteilung der Besonnung in Österreich im Frühling, Sommer, Herbst und Winter (mit 4 mehrfarbigen Karten im Maßstab 1:1500000). Statistische Nachrichten, Jg. X, Nr. 10, Wien 1955.

Für Zwecke der Praxis genügt nicht die Kenntnis der Intensitäten der Strahlung, die jeweils senkrecht auf eine der Sonne immer nachgeführte Fläche fällt. Es interessiert hierfür vielmehr die Bestrahlung feststehender Flächen, wie der horizontalen Ebene oder senkrechter Wände. Aus den Werten der jeweils senkrecht auf die Meßfläche einfallenden Strahlungsintensität  $I$  lassen sich die festen, nach bestimmten Richtungen orientierten Flächen zukommenden Strahlungskomponenten einfach berechnen. Wenn  $h$  der Höhenwinkel der Sonne und  $A$  der von der Südrichtung aus gezählte Azimutwinkel der Sonne ist, so berechnet man die einer horizontalen Ebene zukommende Strahlungskomponente aus  $I_H = I \sin h$ , die einer Südwand zukommende Strahlungskomponente aus  $I_S = I \cos h \cos A$ , die einer Ostwand zukommende Strahlungskomponente aus  $I_E = I \cos h \sin A$ .

Bei der Bestrahlung der Südwand ist zu beachten, daß zwischen den Frühlings- und Herbstäquinoktien die Sonnenstrahlung nicht sogleich nach Sonnenaufgang, sondern erst später die Südwand trifft. Bei Azimutwinkel über  $90^\circ$  wird die nach der Formel für die Südwand berechnete Strahlungsintensität negativ, was besagt, daß zu diesen Zeiten nicht die Südwand, sondern die Nordwand bestrahlt wird. Dies beginnt nach dem Märzäquinoktium und dauert bis zum Septemberäquinoktium. Dabei verspätet sich der Sonnenaufgang auf der Südwand von 6 Uhr am 21. März bis nach 7.30 Uhr im Juni und verfrüht sich anschließend wieder bis 6 Uhr im September.

Für die Bestrahlung der Westwand gilt der um die Mittagsstunde gespiegelte Tagesgang der Bestrahlung der Ostwand.

In den Tab. 1 bis 3 sind die Tagesgänge für die Mitte jeden Monats und für die Höhenlagen von 200, 1000, 2000 und 3000 m nach Stundenwerten für  $47^\circ$  N wiedergegeben. Für die waagrechte Fläche und für die Süd- und Nordwand sind die angeführten halben Tagesgänge entsprechend für den Nachmittag zu ergänzen. In Abb. 1 sind ferner die Tagesgänge für den Monat Dezember mit dem kürzesten Tagbogen der Sonne, für den Monat Juni mit dem längsten Tagbogen und für den Monat März mit Tag- und Nachtgleiche auch graphisch veranschaulicht.

An den Tagesgängen der Bestrahlung der waagrechten Fläche (Tab. 1) ist bemerkenswert, daß die Mittagsintensitäten im Winter sehr niedrig sind, im Sommer aber ungefähr den dreifachen Wert erreichen. In den Vormittagsstunden sind die Unterschiede noch größer. Um 9 Uhr steigt zum Beispiel die Bestrahlungsintensität der waagrechten Fläche in der Niederung von Dezember bis Juni auf ungefähr das Neunfache, in 3000 m Höhe auf ungefähr das Sechsfache. Es ist überhaupt bemerkenswert, daß bei niedrigem Sonnenstand die Strahlungsintensität auf die waagrechte Fläche mit der Höhe viel stärker zunimmt als bei hohem Sonnenstand, was verständlich ist, weil bei niedrigem Sonnenstand auf dem langen Wege durch die unteren dichteren und trüberen Luftschichten die Strahlung mehr geschwächt wird als bei höherem Sonnenstand, wo dieser Weg der Strahlen viel kürzer ist.

An den Tagesgängen der Bestrahlung der Ostwand (Tab. 2) fällt besonders auf, daß die Strahlungsintensität unmittelbar nach Sonnenaufgang rasch ansteigt und zum Beispiel im Dezember in den verschiedenen Höhenstufen nach ein bis eindreiviertel Stunden, im März nach eindreiviertel bis zweieinhalb Stunden und im Juni nach drei bis dreieinhalb Stunden bereits das Maximum erreicht (Abb. 1). Der Abfall vom Maximum zum Nullwert um 12 Uhr dauert um etwa eineinhalb Stunden länger, und zwar im Dezember zweieinhalb bis drei Stunden, im März dreieinhalb bis vier Stunden und im Juni viereinhalb bis fünf Stunden. Besonders bemerkenswert und überraschend ist, daß sich mit der Höhe nicht nur die Beträge des Maximums im Tagesgang der Bestrahlung der Ostwand vergrößern, sondern daß sich auch die Eintrittszeiten mit der Höhe verfrühen, und zwar von 200 m bis 3000 m Höhe um

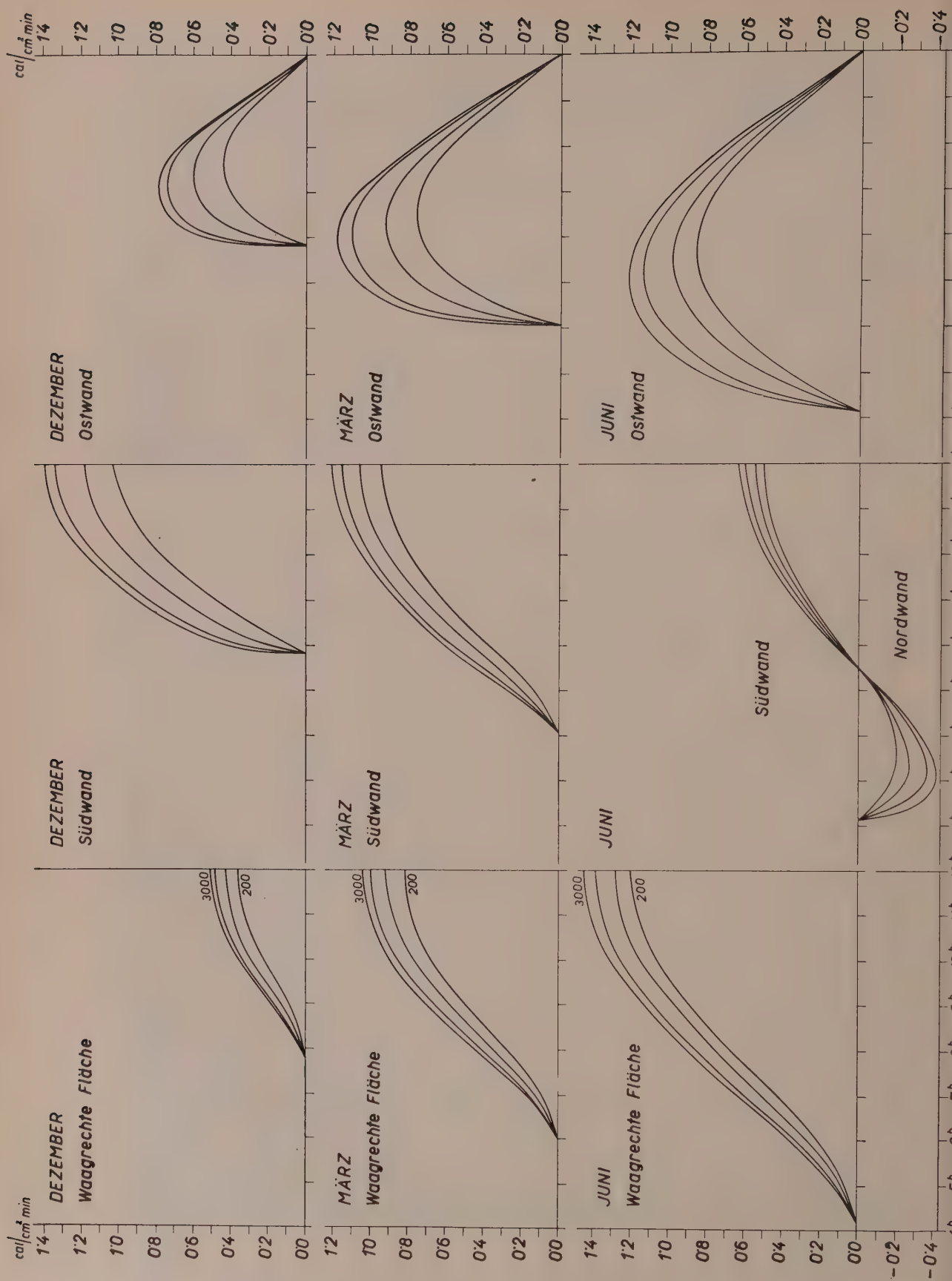


Abb. 1. Tagesgang der Bestrahlung einer waagrechten Fläche, einer Süd- und Nordwand und einer Ostwand im Dezember, März und Juni in 200, 1000, 2000 und 3000 m Höhe ( $47^\circ \text{ N}$ )



Tabelle 1. Tagesgang der Intensität der auf eine horizontale Ebene auffallenden Sonnenstrahlung in verschiedenen Höhen, cal/cm² min

	5 Uhr	6 Uhr	7 Uhr	8 Uhr	9 Uhr	10 Uhr	11 Uhr	12 Uhr
200 m								
Jänner.....	—	—	—	0·02	0·13	0·27	0·37	0·39
Februar.....	—	—	0·00	0·10	0·27	0·45	0·57	0·61
März.....	—	—	0·08	0·27	0·49	0·68	0·79	0·82
April.....	—	0·05	0·22	0·44	0·66	0·85	0·96	1·00
Mai.....	0·02	0·14	0·36	0·60	0·81	0·98	1·08	1·11
Juni.....	0·04	0·21	0·41	0·67	0·88	1·06	1·16	1·20
Juli.....	0·04	0·19	0·40	0·63	0·83	0·99	1·08	1·12
August.....	0·00	0·09	0·29	0·52	0·73	0·91	1·01	1·05
September.....	—	0·01	0·15	0·37	0·59	0·76	0·87	0·91
Oktober.....	—	—	0·02	0·16	0·35	0·52	0·64	0·68
November.....	—	—	—	0·03	0·18	0·33	0·44	0·49
Dezember.....	—	—	—	0·01	0·10	0·23	0·33	0·37
1000 m								
Jänner.....	—	—	—	0·03	0·19	0·35	0·45	0·48
Februar.....	—	—	0·00	0·15	0·36	0·55	0·67	0·71
März.....	—	—	0·12	0·34	0·58	0·76	0·89	0·92
April.....	—	0·08	0·29	0·54	0·78	0·98	1·10	1·13
Mai.....	0·03	0·19	0·43	0·69	0·91	1·08	1·19	1·22
Juni.....	0·07	0·25	0·50	0·74	0·96	1·14	1·25	1·28
Juli.....	0·05	0·22	0·46	0·70	0·92	1·08	1·18	1·22
August.....	0·00	0·13	0·35	0·60	0·83	1·01	1·12	1·16
September.....	—	0·02	0·20	0·44	0·67	0·85	0·98	1·01
Oktober.....	—	—	0·04	0·22	0·44	0·61	0·74	0·78
November.....	—	—	—	0·06	0·24	0·40	0·52	0·56
Dezember.....	—	—	—	0·02	0·13	0·29	0·39	0·43
2000 m								
Jänner.....	—	—	—	0·04	0·22	0·39	0·50	0·53
Februar.....	—	—	0·01	0·19	0·42	0·62	0·73	0·77
März.....	—	—	0·16	0·42	0·66	0·86	0·97	1·00
April.....	—	0·11	0·36	0·64	0·88	1·09	1·20	1·24
Mai.....	0·04	0·24	0·52	0·78	1·02	1·20	1·31	1·34
Juni.....	0·10	0·32	0·58	0·84	1·07	1·24	1·35	1·38
Juli.....	0·08	0·28	0·54	0·80	1·02	1·20	1·31	1·35
August.....	0·01	0·17	0·43	0·69	0·92	1·11	1·22	1·26
September.....	—	0·03	0·24	0·50	0·75	0·93	1·05	1·09
Oktober.....	—	—	0·06	0·28	0·52	0·70	0·82	0·86
November.....	—	—	—	0·09	0·29	0·45	0·58	0·62
Dezember.....	—	—	—	0·03	0·17	0·34	0·45	0·49
3000 m								
Jänner.....	—	—	—	0·05	0·23	0·41	0·52	0·55
Februar.....	—	—	0·01	0·20	0·44	0·65	0·76	0·80
März.....	—	—	0·17	0·44	0·70	0·90	1·01	1·05
April.....	—	0·12	0·38	0·66	0·91	1·12	1·23	1·27
Mai.....	0·05	0·27	0·55	0·82	1·06	1·26	1·38	1·41
Juni.....	0·12	0·35	0·62	0·88	1·12	1·30	1·41	1·45
Juli.....	0·09	0·32	0·59	0·86	1·09	1·28	1·40	1·43
August.....	0·01	0·20	0·47	0·74	0·98	1·17	1·29	1·32
September.....	—	0·04	0·27	0·54	0·80	0·99	1·11	1·15
Oktober.....	—	—	0·07	0·30	0·54	0·73	0·85	0·89
November.....	—	—	—	0·10	0·30	0·47	0·59	0·63
Dezember.....	—	—	—	0·03	0·18	0·36	0·47	0·51

Tabelle 2. Tagesgang der Intensität der auf eine Ostwand auffallenden Sonnenstrahlung in verschiedenen Höhen, cal/cm<sup>2</sup> min

	5 Uhr	6 Uhr	7 Uhr	8 Uhr	9 Uhr	10 Uhr	11 Uhr	12 Uhr
200 m								
Jänner.....	—	—	—	0·26	0·49	0·45	0·26	0·00
Februar.....	—	—	—	0·54	0·62	0·53	0·29	0·00
März.....	—	—	0·53	0·76	0·75	0·60	0·32	0·00
April.....	—	0·39	0·71	0·82	0·77	0·59	0·31	0·00
Mai.....	0·21	0·58	0·81	0·86	0·77	0·57	0·30	0·00
Juni.....	0·35	0·66	0·83	0·86	0·75	0·56	0·29	0·00
Juli.....	0·32	0·67	0·85	0·86	0·75	0·54	0·28	0·00
August.....	—	0·54	0·78	0·86	0·77	0·57	0·30	0·00
September.....	—	0·20	0·67	0·81	0·77	0·58	0·31	0·00
Oktober.....	—	—	0·29	0·62	0·68	0·54	0·31	0·00
November.....	—	—	—	0·33	0·53	0·50	0·30	0·00
Dezember.....	—	—	—	0·11	0·42	0·44	0·26	0·00
1000 m								
Jänner.....	—	—	—	0·51	0·66	0·56	0·31	0·00
Februar.....	—	—	—	0·78	0·80	0·64	0·34	0·00
März.....	—	—	0·76	0·93	0·88	0·68	0·35	0·00
April.....	—	0·62	0·92	1·01	0·90	0·67	0·35	0·00
Mai.....	0·33	0·77	0·97	0·98	0·85	0·62	0·33	0·00
Juni.....	0·51	0·82	0·97	0·96	0·83	0·61	0·32	0·00
Juli.....	0·46	0·81	0·97	0·96	0·82	0·59	0·31	0·00
August.....	—	0·72	0·95	1·00	0·87	0·64	0·33	0·00
September.....	—	0·37	0·86	0·96	0·89	0·65	0·34	0·00
Oktober.....	—	—	0·54	0·83	0·83	0·64	0·36	0·00
November.....	—	—	—	0·56	0·71	0·61	0·35	0·00
Dezember.....	—	—	—	0·28	0·60	0·55	0·30	0·00
2000 m								
Jänner.....	—	—	—	0·66	0·79	0·63	0·35	0·00
Februar.....	—	—	—	0·98	0·93	0·72	0·37	0·00
März.....	—	—	0·99	1·13	1·01	0·76	0·39	0·00
April.....	—	0·87	1·16	1·18	1·02	0·75	0·38	0·00
Mai.....	0·52	0·99	1·15	1·12	0·96	0·69	0·37	0·00
Juni.....	0·73	1·02	1·14	1·10	0·93	0·67	0·34	0·00
Juli.....	0·66	1·00	1·14	1·09	0·92	0·66	0·34	0·00
August.....	—	0·94	1·13	1·14	0·96	0·70	0·37	0·00
September.....	—	0·60	1·06	1·13	1·00	0·72	0·37	0·00
Oktober.....	—	—	0·82	1·03	0·98	0·72	0·40	0·00
November.....	—	—	—	0·77	0·85	0·69	0·39	0·00
Dezember.....	—	—	—	0·50	0·76	0·65	0·35	0·00
3000 m								
Jänner.....	—	—	—	0·68	0·82	0·66	0·36	0·00
Februar.....	—	—	—	1·03	0·97	0·75	0·39	0·00
März.....	—	—	1·07	1·19	1·06	0·79	0·40	0·00
April.....	—	0·96	1·24	1·22	1·05	0·77	0·39	0·00
Mai.....	0·63	1·10	1·23	1·19	1·00	0·73	0·39	0·00
Juni.....	0·84	1·12	1·21	1·16	0·98	0·70	0·36	0·00
Juli.....	0·83	1·13	1·23	1·17	0·98	0·70	0·36	0·00
August.....	—	1·09	1·24	1·23	1·03	0·75	0·39	0·00
September.....	—	0·73	1·17	1·21	1·06	0·76	0·39	0·00
Oktober.....	—	—	0·92	1·10	1·03	0·76	0·42	0·00
November.....	—	—	—	0·82	0·88	0·71	0·40	0·00
Dezember.....	—	—	—	0·57	0·81	0·68	0·36	0·00

Tabelle 3. Tagesgang der Intensität der auf eine Südwand bzw. auf eine Nordwand (negative Zahlen) auffallenden Sonnenstrahlung in verschiedenen Höhen, cal/cm² min

	5 Uhr	6 Uhr	7 Uhr	8 Uhr	9 Uhr	10 Uhr	11 Uhr	12 Uhr
200 m								
Jänner.....	—	—	—	0·19	0·54	0·81	0·95	0·98
Februar.....	—	—	—	0·34	0·62	0·85	1·01	1·06
März .....	—	—	0·13	0·38	0·61	0·79	0·91	0·95
April .....	—	—0·04	0·05	0·25	0·44	0·61	0·72	0·77
Mai .....	—0·10	—0·15	—0·06	0·14	0·31	0·46	0·55	0·59
Juni .....	—0·17	—0·19	—0·09	0·09	0·26	0·39	0·48	0·51
Juli .....	—0·14	—0·15	—0·03	0·15	0·32	0·44	0·51	0·53
August .....	—	—0·09	0·03	0·18	0·39	0·55	0·65	0·68
September .....	—	—0·01	0·11	0·30	0·52	0·72	0·84	0·88
Oktober.....	—	—	0·07	0·30	0·55	0·77	0·91	0·98
November.....	—	—	—	0·22	0·53	0·80	0·97	1·05
Dezember .....	—	—	—	0·08	0·46	0·76	0·95	1·03
1000 m								
Jänner.....	—	—	—	0·37	0·73	1·01	1·17	1·22
Februar.....	—	—	—	0·49	0·80	1·02	1·17	1·22
März .....	—	—	0·19	0·47	0·71	0·90	1·02	1·06
April .....	—	—0·07	0·06	0·31	0·52	0·70	0·82	0·86
Mai .....	—0·15	—0·19	—0·07	0·16	0·34	0·50	0·60	0·65
Juni .....	—0·25	—0·23	—0·10	0·10	0·29	0·43	0·52	0·56
Juli .....	—0·19	—0·19	—0·03	0·17	0·35	0·48	0·55	0·57
August .....	—	—0·11	0·03	0·21	0·44	0·61	0·72	0·74
September .....	—	—0·01	0·14	0·37	0·60	0·81	0·93	0·97
Oktober.....	—	—	0·14	0·41	0·67	0·91	1·06	1·12
November.....	—	—	—	0·36	0·71	0·97	1·13	1·20
Dezember .....	—	—	—	0·21	0·67	0·95	1·13	1·19
2000 m								
Jänner.....	—	—	—	0·48	0·88	1·14	1·30	1·35
Februar.....	—	—	—	0·61	0·93	1·15	1·29	1·33
März .....	—	—	0·25	0·57	0·82	1·00	1·12	1·16
April .....	—	—0·09	0·08	0·36	0·59	0·77	0·90	0·94
Mai .....	—0·24	—0·25	—0·08	0·18	0·39	0·56	0·66	0·71
Juni .....	—0·36	—0·29	—0·12	0·12	0·32	0·47	0·57	0·60
Juli .....	—0·28	—0·23	—0·04	0·19	0·39	0·53	0·61	0·63
August .....	—	—0·15	0·04	0·24	0·49	0·67	0·78	0·82
September .....	—	—0·02	0·17	0·43	0·67	0·89	1·01	1·05
Oktober.....	—	—	0·20	0·50	0·79	1·03	1·17	1·24
November.....	—	—	—	0·50	0·85	1·11	1·26	1·33
Dezember .....	—	—	—	0·36	0·84	1·12	1·29	1·35
3000 m								
Jänner.....	—	—	—	0·49	0·92	1·19	1·34	1·39
Februar.....	—	—	—	0·65	0·97	1·20	1·34	1·39
März .....	—	—	0·27	0·61	0·86	1·05	1·17	1·22
April .....	—	—0·10	0·09	0·37	0·61	0·80	0·92	0·96
Mai .....	—0·30	—0·27	—0·09	0·19	0·40	0·59	0·70	0·75
Juni .....	—0·41	—0·32	—0·13	0·12	0·34	0·49	0·60	0·64
Juli .....	—0·35	—0·26	—0·04	0·21	0·42	0·56	0·65	0·67
August .....	—	—0·17	0·04	0·26	0·53	0·72	0·83	0·85
September .....	—	—0·03	0·19	0·47	0·72	0·94	1·06	1·11
Oktober.....	—	—	0·23	0·54	0·83	1·09	1·22	1·29
November.....	—	—	—	0·53	0·88	1·14	1·30	1·37
Dezember .....	—	—	—	0·41	0·89	1·17	1·35	1·40



ungefähr eine halbe bis dreiviertel Stunden. Dies ist darauf zurückzuführen, daß wegen der großen Reinheit der Höhenluft die Strahlungsintensität nach Sonnenaufgang in den höheren Lagen viel rascher ansteigt als in tieferen Lagen. Analog tritt an der Westwand eine Verspätung der Eintrittszeit des Strahlungsmaximums am Nachmittag ein. Von Oktober bis Februar ist das Strahlungsmaximum auf der Ostwand bzw. auf der Westwand größer als das mittägige Maximum der Bestrahlung einer waagrechten Fläche. In den übrigen Monaten ist es umgekehrt. Im Juni ist das Maximum im Tagesgang der Bestrahlung der Ostwand ungefähr um die Hälfte größer als im Dezember.

Im Tagesgang der Bestrahlung der Südwand (Tab. 3) steigt die Intensität im Winter sehr rasch, im Sommer aber nur langsam nach Beginn der Bestrahlung an. Die Maxima werden naturgemäß zu Mittag erreicht. Sie sind in den Wintermonaten mehr als doppelt so groß wie im Hochsommer. Das ist das charakteristische, daß die Bestrahlung der Südwälle im Winter am intensivsten ist. Vom Oktober bis März ist die mittägige Bestrahlung der Südwand größer als die der waagrechten Fläche, und zwar im Dezember und Jänner fast dreimal so groß, während im Hochsommer die mittägige Bestrahlung der Südwand nicht einmal halb so groß ist wie die Bestrahlung der waagrechten Fläche. Das Tagesmaximum der Bestrahlung der Südwand ist vom Oktober bis März größer als das Tagesmaximum der Bestrahlung der Ost- oder Westwand. In den übrigen Monaten ist es umgekehrt. Das Tagesmaximum der Bestrahlung der Südwand nimmt im Sommerhalbjahr mit der Höhe viel weniger stark zu als das Tagesmaximum der Bestrahlung der Ost- oder Westwand. Im Winter erfolgt die Zunahme der Tagesmaxima der Bestrahlung der Südwand mit der Höhe viel rascher und ungefähr ebenso rasch wie die Höhenzunahme des täglichen Strahlungsmaximums auf der Ost- oder Westwand.

Die Nordwand (Tab. 3) erhält in den Monaten des Sommerhalbjahres nur geringe Strahlungsintensitäten, und zwar in einer Zeit nach Sonnenaufgang und vor Sonnenuntergang, die im Juni die längste Dauer mit zusammengekommen mehr als sechs Stunden erreicht (Abb. 1). Auch an der Nordwand steigt die Intensität der Bestrahlung nach Sonnenaufgang rasch an und fällt dann bis zum Übergang der Sonne auf die Südwand langsam ab. Umgekehrt ist es am Abend vor Sonnenuntergang.

Neben den Intensitäten zu verschiedenen Zeiten und der Dauer der Bestrahlung kommt es bei der Erfassung der gesamten zur Verfügung stehenden Strahlung auf die Tagessummen an. Diese können aus den in den Tab. 1 bis 3 wiedergegebenen Tagesgängen einfach bestimmt werden, wenn man die Kurven der Tagesgänge zeichnet und die entsprechenden Flächen planimetriert. Eine Übersicht über die so gewonnenen Tagessummen der einzelnen Monate, die natürlich nur für wolkenlose Tage gelten, gibt für die verschiedenen Höhenlagen die Tab. 4.

Aus Tab. 4a ist ersichtlich, daß die Tagessummen der Bestrahlung der waagrechten Fläche im Jahresgang das Minimum im Dezember und das Maximum im Juni aufweisen und daß die Tagessumme im Juni in 200 m Höhe fast sechsmal und in 3000 m Höhe mehr als fünfmal so groß ist wie die Tagessumme im Dezember. Im Winter nehmen die Tagessummen mit der Höhe relativ viel stärker zu als im Sommer. Im Dezember ist die Tagessumme der Bestrahlung der waagrechten Fläche in 3000 m Höhe etwa um die Hälfte, im Juni aber nur um ein Drittel größer als in der Niederung. Kalorienmäßig ist der Unterschied gegenüber der Niederung allerdings im Sommer viel größer als im Winter; er beträgt im Juni 185 cal/cm<sup>2</sup> Tag, im Dezember aber nur 50 cal/cm<sup>2</sup> Tag.

Die Tagessummen der Bestrahlung von Ost- oder Westwänden (Tab. 4b) sind naturgemäß viel kleiner als die Tagessummen der Bestrahlung einer waagrechten Fläche, da sie ja nur einen halben Tag lang Bestrahlung erhalten. Die

Tabelle 4. Tagessummen der auf eine waagrechte Fläche, auf eine Ost- bzw. Westwand, auf eine Südwand und auf eine Nordwand fallenden Sonnenstrahlung für den 15. jeden Monats in 47° n. Breite (gcal/cm² Tag) in verschiedenen Höhen

Höhe, m	Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
a) Waagrechte Fläche												
200 .....	115	201	322	431	536	588	558	484	382	240	148	102
1000 .....	148	247	373	509	606	659	623	550	434	290	178	124
2000 .....	167	278	422	575	684	729	700	614	484	332	206	144
3000 .....	175	293	445	599	717	773	752	656	516	350	217	152
b) Ost- oder Westwand												
200 .....	87	125	180	219	247	259	258	238	203	145	101	74
1000 .....	118	167	226	263	292	302	297	277	243	190	136	102
2000 .....	142	199	273	322	349	359	354	333	286	233	165	129
3000 .....	147	214	289	341	374	399	386	365	311	250	172	136
c) Südwand												
200 .....	357	408	398	296	212	178	202	258	354	372	365	336
1000 .....	462	500	463	345	231	194	222	288	398	452	450	426
2000 .....	527	568	524	381	258	212	247	315	444	522	521	508
3000 .....	552	598	552	395	272	222	263	336	472	547	543	536
d) Nordwand												
200 .....	—	—	—	5	34	53	38	14	0	—	—	—
1000 .....	—	—	—	7	47	69	50	19	0	—	—	—
2000 .....	—	—	—	9	63	92	62	26	1	—	—	—
3000 .....	—	—	—	11	72	109	77	30	1	—	—	—

Maxima fallen wieder auf den Juni und die Minima auf den Dezember. Bemerkenswert ist, daß in den Monaten des Sommerhalbjahres von April bis Oktober die Änderungen der Tagessummen nicht groß sind. Dementsprechend sind die Unterschiede gegenüber der Bestrahlung einer waagrecchten Fläche im Sommer viel größer als im Winter. Die Ost- oder Westwand erhält im Juni in 200 m nur 44 % und in 3000 m nur 52 % der Tagessumme, die auf eine waagrechte Fläche fällt, im Dezember aber in 200 m noch 73 % und in 3000 m sogar 90 % der Tagessumme der waagrecchten Fläche. In 3000 m ist die Tagessumme der Bestrahlung der Ostwand im Dezember fast doppelt so groß, im Juni aber nur um die Hälfte größer als in der Niederung.

Einen bemerkenswerten Jahresgang der Tagessummen weist die Bestrahlung der Südwand (Tab. 4c) auf. Der Jahresgang zeigt eine Doppelwelle mit zwei annähernd gleich großen Maxima im Februar und im Oktober und mit einem Hauptminimum im Juni und einem viel schwächer entwickelten sekundären Minimum im Dezember. Dies ist gerade für Zwecke der Praxis von Bedeutung, weil die größten Strahlungssummen auf die Übergangsjahreszeiten fallen, in denen höherer Strahlungsgenuß im allgemeinen mehr erwünscht ist als in den Sommermonaten, wo durch hohe Strahlungssummen die Hitze unliebsam noch weiter gesteigert würde. Das Dezemberminimum der Tagessummen ist in der Niederung fast doppelt so groß und in 3000 m Höhe sogar fast zweieinhalbmals so groß als das Juniminimum. Die Zunahme der Tagessumme mit der Höhe ist in den Monaten Mai bis August nur sehr gering, in den Monaten Oktober bis März aber sehr groß. Im Juni ist die Tagessumme der Bestrahlung einer Südwand in 3000 m Höhe nur um 25 % größer, im Dezember aber um 60 % größer als in der Niederung.

Im Verhältnis zur waagrecchten Fläche bekommt eine Südwand in den Monaten Oktober bis März größere, in den übrigen Monaten aber kleinere Tagessummen der



Bestrahlung. Die Unterschiede sind besonders im Hochsommer und im Hochwinter sehr groß. Im Dezember erhält die Südwand fast das Dreieinhalbfache, im Juni aber nur weniger als ein Drittel der Tagessummen der waagrechten Fläche. In den Übergangsjahreszeiten sind die Unterschiede nicht sehr groß; die Südwand erhält aber höhere Strahlungssummen. Gegenüber einer Ost- oder Westwand sind die Bestrahlungssummen der Südwand von September bis April größer, in den übrigen Monaten aber kleiner. Besonders groß sind die Unterschiede im Winter, wo im Dezember auf die Südwand in der Niederung viereinhalbmals und in 3000 m Höhe viermal so große Strahlungssummen fallen, während im Sommer die Unterschiede viel kleiner sind und die Südwand im Juni in 200 m um ein Drittel und in 3000 m um fast die Hälfte weniger Strahlung erhält als eine Ostwand.

Tab. 4d zeigt, daß die Tagessummen der Bestrahlung der Nordwand nur sehr gering sind. Sie erreichen ihr Maximum im Juni und sind in der Gipfelhöhe der Alpen ungefähr doppelt so groß wie in der Niederung. In diesem Monat erhält aber in 3000 m Höhe die Nordwand doch auch noch ungefähr die Hälfte der Bestrahlungssumme einer Südwand, in der Niederung aber weniger als ein Drittel der Südwand.

Aus den in den Tab. 1 bis 3 wiedergegebenen Komponenten der Bestrahlung der drei aufeinander senkrechten Flächen kann in einfacher geometrischer Art auch die Bestrahlung einer Südostwand oder einer um irgendeinen Winkel aus der Südrichtung herausgedrehten Wand und auch die Bestrahlung von Hängen berechnet werden. Bei der Bestimmung der Tagessummen ist dabei auf die Zeiten von Beginn und Ende der Bestrahlungsmöglichkeit der verschiedenen Flächen besonders zu achten. Zu ihrer Bestimmung benötigte Werte des Azimuts findet man in <sup>4</sup>.

<sup>4</sup> O. Eckel: Sonnenazimut. Wetter u. Leben 1, 275 (1948).

(Eingegangen am 1. März 1956)

## Probleme der künftigen Energieerzeugung

Von Hans Thirring, Wien

**Zusammenfassung.** Die Verwertung der Atomenergie für friedliche Zwecke vermag zwar nicht direkt ein goldenes Zeitalter einzuleiten, weil wenig Aussicht auf eine erhebliche Senkung der Stromerzeugungskosten besteht, wohl aber ist Hahns große Entdeckung von entscheidender Wichtigkeit darum, weil sie gerade zurecht kam, um die Energiewirtschaft vor einem Zusammenbruch zu retten, vor dem sie im Laufe des nächsten Jahrhunderts nach Verknappung der Reserven an fossilen Brennstoffen gestanden wäre.

Am Beispiel dreier Länder werden spezielle Probleme der künftigen Energieversorgung erläutert: England wird in besonderem Maße auf Atomkraftwerke angewiesen sein, Frankreich kann erheblichen Gewinn aus Gezeitenkraftwerken ziehen, für die besonders günstige Bedingungen an der Kanalküste vorliegen, und Österreich wird nach Vollausbau seiner Wasserkräfte in der Lage sein, auch einen Großteil der Haushaltswärme aus dem Verbundnetz zu decken, sobald einmal Vorsorge für billige Massenproduktion von Wärmepumpen getroffen sein wird.

Energiequellen zur Erzeugung von Wärme, Elektrizität und mechanischer Arbeit spielen die Rolle eines lebenswichtigen Rohstoffes, der bei den zivilisierten Völkern an Bedeutung gleich hinter der Nahrung auf einer ähnlichen Stufe wie etwa Textilien und Baustoffe steht. Der Preis, den wir für Energie zahlen müssen, steht in umgekehrtem Verhältnis zum Lebensstandard der Bevölkerung, und der Reichtum der Vereinigten Staaten ist nicht zuletzt auf dem Vorhandensein ergiebiger Energiequellen in Form von Kohle, Erdöl, Erdgas und natürlichen Wasserkräften zurückzuführen. Auf Grund dieser Tatsache und angesichts des in der letzten Zeit ausgebrochenen Rummels mit den Atomkraftwerken könnte leicht die Vermutung auf-



kommen, daß die an sich gewiß großartige Entdeckung der Uranspaltung durch Hahn und Straßmann zu einer ungeahnten Erhöhung des allgemeinen Lebensstandards führen werde. Ganz nüchtern betrachtet liegen die Verhältnisse aber anders und die Aussichten für die Zukunft lassen sich in groben Zügen mit ziemlicher Sicherheit wie folgt skizzieren:

1. Elektrizitätserzeugung aus Kernenergie mit Uran und Thorium als primäre Brennstoffe ist durchaus möglich, wird in den nächsten Jahren in immer stärkerem Tempo durchgeführt werden, ist aber beim heutigen Stand der Entwicklung noch wesentlich teurer als Stromerzeugung aus Kohle oder Wasserkraften. Man wird schon sehr zufrieden sein, wenn es in den nächsten Jahren gelingen wird, hinsichtlich des Strompreises mit den bestehenden kalorischen Kraftwerken konkurrieren zu können. Billiger als Hydroelektrizität aus gut gelegenen und bereits amortisierten Wasserkraftanlagen kann die Produktion aus Kernenergie wohl überhaupt nie werden.

2. Dennoch ist die Verwertung der Kernenergie auf lange Sicht betrachtet von allergrößter Bedeutung, weil das in den nächsten Generationen mit Sicherheit zu erwartende Sinken der Produktion fossiler Brennstoffe eine arge Verknappung der zur Verfügung stehenden elektrischen und kalorischen Energie hervorgerufen hätte, die allem technischen Fortschritt zum Trotz zu einer katastrophalen Senkung des allgemeinen Lebensstandards hätte führen müssen. Eine Deckung des Ausfalles durch Erzeugung aus dem laufenden Energieeinkommen, wie Wasserkraft aus Flüssen und Gezeiten, Windenergie, Sonnenenergie usw., wäre nur regional möglich gewesen und hätte selbst dort bei Ausfall der Hauptbrennstoffe zu einer erheblichen Steigerung des Energiepreises führen müssen. Hahns große Entdeckung wird daher zwar nicht direkt den Weg in eine goldene Zukunft öffnen, aber sie kam gerade zurecht, um die Energiewirtschaft der Welt vor dem Zusammenbruch zu retten, vor dem sie zu Beginn des nächsten Jahrhunderts gestanden wäre.

Wenn im folgenden von Energie schlechtweg gesprochen wird, so ist damit der gesamte Energieverbrauch zu verstehen, dessen Hauptposten Wärme für Haushalt und Industrie, mechanische Arbeit für Industrie und Transport sowie elektrische Energie sind.

### Die Verzehrung des Energiekapitals

Man kann mit ziemlicher Sicherheit voraussehen, daß sich in den nächsten hundert Jahren mit dem allmählichen Übergang von den fossilen Brennstoffen auf Kernbrennstoffe ein ähnlicher Vorgang abspielen wird, wie der seit der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts bis in die Gegenwart erfolgte Übergang von Brennholz auf Kohle. Obwohl in einzelnen Ländern, wie England und Deutschland, der Energieverbrauch (damals noch überwiegend für Haushaltswärme und Industriewärme) schon seit einiger Zeit zu einem Großteil aus Kohle gedeckt wurde, lag hinsichtlich des Weltverbrauches das Holz als Energiespender noch bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts an erster Stelle und in einzelnen Ländern, wie z. B. in Rußland, behielt es diese führende Rolle noch bis etwa 1930. Im Durchschnitt der industrialisierten Länder hat zur Zeit des Beginnes des ersten Weltkrieges die Kohle rund 80% des Bedarfes gedeckt; im Weltdurchschnitt waren es etwa 60%. Seither ist dann ein stärkeres Anwachsen der Energieproduktion aus Erdöl und Erdgas festzustellen, derart, daß zwar Kohle noch immer an erster Stelle steht, aber nicht mehr die überwiegende Rolle spielt wie vor einem halben Jahrhundert. Aber jedenfalls decken Kohle, Erdöl und Erdgas zusammen gegenwärtig mehr als Dreiviertel des Weltbedarfes, während der Anteil von Brennholz auf rund 5% heruntergegangen ist und der Anteil der Energieerzeugung aus Wasserkraften zwar seit 60 Jahren in ständigem Ansteigen begriffen ist, aber

eben erst knapp mehr als 1 % erreicht hat und auch in alle Zukunft kaum jemals mehr als 5 % des jeweiligen Weltbedarfes wird decken können.

Das charakteristische Merkmal dieser Situation besteht nun darin, daß im Gegensatz zur Zeit vor 1800, als in den meisten Ländern noch der Großteil des Energiebedarfes aus den laufenden Einnahmen (Brennholz) gedeckt werden konnte, die heutige Energiewirtschaft darauf basiert, ein ein für allemal vorgegebenes Energiekapital in raschem Tempo zu verzehren. An dieser Sachlage wird sich auch durch Nutzbarmachung der Atomenergie nichts ändern, denn auch die Vorräte an den Kernbrennstoffen Uran und Thorium sind keineswegs unerschöpflich und der Zeitpunkt des Energiebankrotts ist daher vorläufig nur hinausgeschoben, ohne daß — zumindest beim gegenwärtigen Stand der Technik — die Gefahr ein für allemal beseitigt worden wäre.

Allerdings gewährt uns die Verwertung der Kernbrennstoffe eine Prolongierung des Wechsels auf lange Sicht. Denn bei dem aller Voraussicht nach zu erwartenden Anstieg des Weltenergieverbrauches wäre die Frist bis zur Erschöpfung der fossilen Brennstoffe nur von der Größenordnung eines Jahrhunderts gewesen, während der Vorrat an Kernbrennstoffen für eine Zeit ausreichen dürfte, die in der Größenordnung eines Jahrtausends liegt. Obwohl auch diese Zeit im Vergleich zur voraussichtlichen weiteren Lebensdauer der Menschheit noch immer verschwindend knapp ist, gibt sie unserer Zivilisation doch eine sehr reichliche Frist, um das bisher größte technische Problem überhaupt zu lösen, das darin besteht, die sogenannten thermonuklearen Reaktionen in kontrollierter Form ablaufen zu lassen. Bei diesen Reaktionen handelt es sich um Aufbauprozesse leichter Atomkerne, wie z. B. die Synthese von Heliumkernen aus Wasserstoffkernen, die sich bei genügend hoher Temperatur als Kettenreaktionen vollziehen. Man weiß heute, daß die Synthese von Helium aus Wasserstoff mit Kohlenstoffkernen als Katalysatoren die Energiequelle der Sonne bildet, und außerdem ist es seit einigen Jahren auch schon gelungen, solche Vorgänge mit irdischen Mitteln zu verwirklichen, um damit die ungeheure Sprengkraft der Wasserstoffbombe zu erzielen. Was uns fehlt, um Energiereserven von praktisch unerschöpflichen Ausmaßen nutzbar zu machen, ist nichts weiter als ein Schritt, der für den Außenstehenden recht klein erscheinen mag. Denn er wäre nichts weiter als die Umkehrung des auf dem Gebiete der Kernspaltungsreaktionen erfolgten Schrittes vom ersten Reaktor bis zur ersten Atombombe, zu dem die amerikanischen Physiker unter der Leitung Robert Oppenheimers knapp mehr als zweieinhalb Jahre gebraucht hatten (vom 2. Dezember 1942 bis zum 16. Juli 1945).

Im Anschluß an die im Sommer 1955 stattgefundenen Konferenzen über die friedliche Verwertung der Atomenergie (im Juli in Moskau und im August in Genf) wurde nach einigem Zögern bekanntgegeben, daß sowohl in den Vereinigten Staaten wie auch in der Sowjetunion Forscherteams mit großen Mitteln an der Lösung dieser Aufgabe arbeiten. Welche Bedeutung dieser Schritt von den explosiven zu den gesteuerten thermonuklearen Reaktionen, von der Wasserstoffbombe zum thermonuklearen Reaktor hätte, geht wohl am besten aus der Tatsache hervor, daß der Übergang zum Deuterium als Kernbrennstoff eine Streckung der Energievorräte von dem Jahrhundert der fossilen Brennstoffe über das Jahrtausend der spaltbaren Materialien Uran und Thorium hinaus auf eine runde Jahrmilliarde der leichten Kernbrennstoffe bedeuten würde. Das in den Weltmeeren vorhandene Schwerwasser würde genügen, um den Energiebedarf der Menschheit auf ihre voraussichtliche Lebensdauer zu decken, wenn es gelänge, die sogenannte d-d-Reaktion, die Helium aus Deuterium synthetisiert, in einem Reaktor derart gesteuert ablaufen zu lassen, wie man das seit 1942 schon mit den Spaltungsreaktionen des Urans zu tun vermag.



Obwohl wir es hier mit einer Aufgabe zu tun haben, deren Lösung für die Menschheit von unvergleichlich höherem Werte wäre als beispielsweise die künstliche Erzeugung von Gold, und obwohl einige der besten Köpfe unserer Zeit an dem Problem beschäftigt sind, ist es doch recht ungewiß, ob unsere Generation ihre Lösung erleben wird. Welches die grundsätzlichen Schwierigkeiten sind, die im Gegensatz zu den Spaltungsreaktionen den Übergang vom explosiven Ablauf zur gesteuert verlaufenden Kettenreaktion beim gegenwärtigen Stand unseres Wissens noch zu hemmen scheinen, wurde vom Verfasser an einer anderen Stelle ausführlich behandelt<sup>1</sup>, so daß darauf hier nicht eingegangen werden soll. Das, worauf wir in den nächsten Jahrzehnten mit Sicherheit rechnen können, sind jedenfalls nur die Kernreaktoren mit Uran und Thorium als Brennstoff.

Ganz unabhängig davon jedoch, ob in weiterer Zukunft neben dem Kernspaltungsreaktor auch noch der thermonukleare Reaktor auftauchen sollte oder nicht, wäre es ganz ungerechtfertigt, die Ausschöpfung natürlicher Energiequellen aus dem laufenden Einkommen zu vernachlässigen. Gegen die hohen Investitionskosten der Wasserkraftanlagen wird häufig das Bedenken geltend gemacht, daß Kapitalverluste durch die Erschließung billigerer Energiequellen drohen könnten. Darauf ist zu erwidern, daß nach aller menschlichen Voraussicht eine Entwertung der Kilowattstunde nie zu erwarten sein wird und daß im Gegenteil zum Unterschied von anderen Gütern, bei denen je nach der Wirtschaftslage unter Umständen das Angebot die Nachfrage übersteigt, der Bedarf an Energie von Jahr zu Jahr zunimmt und so gut wie überall das Angebot übertrifft. Jede Investition in den Ausbau von günstig gelegenen Wasserkraften, wie sie z. B. im Bereich der Alpen und der Donau vorkommen, wird sich daher im Laufe der Zeit bezahlt machen, ja, es war ein schweres Versäumnis, daß Österreich seine großen Schätze auf diesem Gebiet so lange hat brach liegen lassen.

### Großbritannien

Das Land, das in Ermangelung ergiebiger Wasserkräfte am stärksten auf die Verwertung von Kernenergie angewiesen sein wird, ist England, das auch tatsächlich schon sehr weitgehende Pläne zum Bau von Atomkraftwerken ausgearbeitet hat. Gemäß einem im Februar 1955 dem britischen Parlament vorgelegten Programm<sup>2</sup> werden für die nächsten zehn Jahre Investitionen für Atomkraftwerke in der Höhe von 300 Millionen Pfund Sterling (rund 21 Milliarden österreichische Schillinge) vorgesehen. Am Ende dieser Periode soll die installierte Kapazität der Kernkraftwerke 3900 MW betragen und in den folgenden Fünfjahrperioden auf 6200, dann 13200 und schließlich 23000 MW im Jahre 1980/81 gesteigert werden, was rund 30% der bis dahin auf 80000 MW gesteigerten Kapazität aller britischen E-Werke ausmachen wird. Voraussetzung ist dabei, daß es gelingen wird, in der Zwischenzeit auch die englische Kohlenproduktion in entsprechender Weise zu steigern. Sollte dies — z. B. infolge Mangels an Arbeitskräften — nicht möglich sein, dann würde wahrscheinlich der Prozentsatz der Stromerzeugung aus Kernenergie in Großbritannien bis zum Jahre 1980 noch größer ausfallen.

### Frankreich

Auch in Frankreich sind drei Atomkraftwerke im Bau, aber zum Unterschied gegenüber England ist dort noch eine wesentlich gesteigerte Produktion aus den Wasserkraften zu erwarten. Dabei spielen im Falle Frankreichs nicht nur die Wasserkräfte der Flüsse, sondern auch die der Gezeiten eine wesentliche Rolle, und daher

<sup>1</sup> H. Thirring: Thermonuclear Power Reactors — Are They Feasible? *Nucleonics* **13**, Nr. 11, 62—66 (Nov. 1955).

<sup>2</sup> White Book: Programme of Nuclear Power (Cmd. 9389) (H. M. S. O., London 1955).



wird dieses Land das erste sein, das innerhalb der nächsten Jahre ein Gezeitenkraftwerk mit einer installierten Leistung von mehr als 300 MW besitzen wird. Von den weit mehr als hunderttausend Küstenkilometern der fünf Kontinente erfüllen nur wenige die Vorbedingungen für eine günstige Ausnützung der Gezeiten, nämlich 1. große Amplituden von Ebbe und Flut und 2. entsprechende Gliederung der Küste durch Flußmündungen, Buchten, Fjorde u. dgl., die es gestatten, mit Dämmen bescheidener Länge möglichst große, im Bereiche der Gezeiten liegende Staubecken abschließen zu können.

Diese beiden Bedingungen sind nun an der französischen Kanalküste, namentlich in dem zwischen Bretagne und Normandie liegenden Teil, besonders gut erfüllt, und es ist daher begreiflich, daß gerade französische Forscher sich mit dem Problem der rationellen Ausnützung der Gezeiten am eingehendsten beschäftigt haben und auf diesem Gebiete theoretische Pionierarbeit geleistet haben, deren Früchte in den nächsten Jahrzehnten der Wirtschaft ihres Landes sehr zustatten kommen werden. Im Jahre 1943 wurde die Société d'Études pour l'Utilisation des Marées (S. E. U. M.) gegründet, die später als Studiengesellschaft der verstaatlichten Électricité de France eingegliedert wurde. Über die Arbeiten dieser Gruppe liegt ein Bericht von M. R. Gibrat<sup>3</sup> vor, in dem sich die ganze Fülle mathematischer Probleme offenbart, die im Zusammenhang mit der Verwertung der Gezeiten auftauchen. Gegenüber der trivialen Methode, ein Staubecken bei Flut volllaufen zu lassen und bei Ebbe über ein System von Turbinen zu entleeren, läßt sich eine wesentlich bessere Energieausbeute durch Beachtung der folgenden Möglichkeiten erzielen:

1. Das Füllungs-niveau des Staubeckens läßt sich über das jeweilige Flutniveau hinaus steigern, wenn die Lage des Beckens und seiner Staumauer so gewählt ist, daß die Ufer von seewärts her gegen den Damm konvergieren, so daß eine durch den Stau überhöhte Flutwelle in das Becken eintritt.

2. Turbinenarbeit kann nicht allein bei der Entleerung des Beckens während der Ebbe, sondern auch bei Füllung des Beckens während der Flut geleistet werden. Diese doppelte Ausnützung wird durch die technische Fortbildung einer österreichischen Erfindung erleichtert: Bei den im Jahre 1956 fertigzustellenden Flußkraftwerken von Argentat und Cambeyrat verwendet man Kaplanturbinen, die mit dem auf der Achse sitzenden gekapselten Generator („alternateur bulbe“) zusammen coaxial in dem horizontal verlaufenden Strömungskanal liegen und von der Strömung ganz umflossen werden. Bei Verwendung dieser für kleines Gefälle und großen Wasserfluß geeigneten Anordnung für Gezeitenkraftwerke kann man die Verstellbarkeit der Kaplan-Schaufeln dazu benützen, um die Turbinen auch bei verkehrter Strömungsrichtung in gleichem Sinne umlaufen zu lassen. Das geplante Gezeitenkraftwerk an der Rance-Mündung unweit St. Malo in der Bretagne, wird 38 derartiger „groupes-bulbes“ mit je 9 MW Leistung enthalten, die sowohl bei Füllung wie bei Entleerung des Beckens als Turbinen Arbeit leisten und Energie in das 220-kV-Netz liefern und außerdem auch in beiden Richtungen bei Energieentnahme aus dem Netz als Pumpen funktionieren können. Jede einzelne Gruppe läßt bei 1 m Niveaudifferenz einen Durchfluß von 186 m<sup>3</sup>/s zu.

3. Die Funktion der Turbinen als Pumpen hat bei Gezeitenkraftwerken eine Bedeutung, die über die übliche Energiespeicherung weit hinausgeht. Um das zu erläutern, betrachten wir das Beispiel eines Beckens, in dem sich der unter 1 erwähnte Effekt der dynamischen Überstauung nicht erzielen läßt. Es sei eben der Tiefpunkt der Ebbe erreicht, das Becken ist entleert und der Meeresspiegel beginnt wieder zu steigen, so daß eine allmählich wachsende Niveaudifferenz entsteht. Obwohl sehr

<sup>3</sup> M. R. Gibrat: L'Énergie des Marées, Bulletin de la Société française des Électriciens, 7e Série, Tome III, No 29 (Mai 1953).

bald Arbeit geleistet werden könnte, wäre es ganz falsch, die Turbinen sogleich laufen zu lassen, denn es ist rationeller, die Speicherkapazität des Beckens erst bei Vorhandensein eines bestimmten Mindestgefälles auszunützen. Von einer gewissen Niveaudifferenz an, die sich als Lösung eines Variationsproblems ergibt, wird das Becken gefüllt und die Turbinen leisten Arbeit. Dieser Vorgang kann noch bis kurz über die Phase des Flutmaximums hinaus fortgesetzt werden; sobald aber nach Überschreiten des Maximums die Niveaudifferenz sehr klein wird, ist es zweckmäßig, den Einfluß in das Becken dadurch zu steigern, daß man die mit den Turbinen gekoppelten Dynamos als Motoren laufen läßt und die Gruppe auf diese Weise als Pumpe benützt. Denn die dem Netz entnommene Energie muß nur dazu verwendet werden, um eine bestimmte Wassermenge über eine kleine Niveaudifferenz, etwa von der Größenordnung eines Meters, zu heben, während diese gleiche Wassermenge um eine Viertelperiode später wiederum über ein rund zehnmal größeres Gefälle abströmend die entsprechend größere Arbeit an das Netz rückliefert.

4. Das Problem wird nun dadurch noch verwickelter und andererseits gleichzeitig reizvoller, daß der Wert der elektrischen Energie selbst in den Perioden der Schwachlast, Vollast oder Spitzenlast verschieden hoch ist. Während aber die Netzbelastung eine 24stündige Periodizität aufweist, ist die Gezeitenperiode im Durchschnitt um rund 20 Minuten länger als 12 Stunden, so daß sich der Zeitpunkt von Ebbe und Flut von Tag zu Tag um ungefähr 40 Minuten verspätet. Dazu kommt weiter noch der Umstand, daß die Gezeitenamplituden eine monatliche Periode aufweisen. Aus all dem ergibt sich das sehr reizvolle Extremumsproblem, die Zeitpunkte des Einschaltens der Turbinen zur Energiespeisung in das Netz und zur Energieentnahme aus dem Netz im Laufe einer vollen Mondperiode jeweils so zu tempieren, daß unter Berücksichtigung des veränderlichen Wertes der Energie der maximale Nutzen resultiert.

Das erste große Gezeitenkraftwerk dieser Art wird, wie erwähnt, an der Rance-Mündung gebaut werden und wird bei einer installierten Leistung von 342 MW eine Jahresarbeit von 820 GWh mit einer mittleren Winterspitzenleistung von 280 MW liefern. Bei gegebenen Gezeitenamplituden, die zwischen Bretagne und Normandie hohe Werte zwischen 11 und 13 m erreichen, ist die Leistung des Werkes von der Fläche des abgedämmten Beckens abhängig. Nun läßt sich in der östlich von St. Malo gelegenen Bucht von Mont Saint Michel ein Becken von rund 500 km<sup>2</sup> Fläche durch zwei von der Insel Chausey unter rechtem Winkel nach Süden und Osten laufenden Dämme abgrenzen. Nach entsprechenden Vorstudien und auf Grund der mit dem Rance-Werk gemachten Erfahrungen wird man in ungefähr zehn Jahren mit dem Bau dieses größeren Werkes beginnen, das nach seiner Vollendung um das Jahr 1980 eine installierte Leistung von 10000 bis 15000 MW haben wird und eine Jahresarbeit von rund 20 TWh = 20 Milliarden kWh liefern soll, was rund das Dreifache der gegenwärtigen hydroelektrischen Produktion von ganz Österreich sein wird. Bei Gelingen dieser Projekte wird daher Frankreich in der Lage sein, zusätzlich zur Produktion aus den fossilen und nuklearen Brennstoffreserven noch erhebliche Energiemengen aus den unerschöpflichen Kraftquellen der Natur zu gewinnen.

### Österreich

Österreich ist in der glücklichen Lage, künftig einmal aus den Alpenflüssen und der Donau mehr Energie pro Kopf der Bevölkerung gewinnen zu können als die überwiegende Mehrzahl aller anderen Länder der Erde, obwohl es in dieser Hinsicht mit den ganz besonders begünstigten Ländern, wie Norwegen, Belgisch-Kongo, Französisch-Äquatorialafrika oder Tibet, nicht konkurrieren kann. Von dem Vollausbau der österreichischen Wasserkraft ist eine Steigerung der Jahresproduktion auf den



etwa fünf- bis sechsfachen Wert des heutigen Standes zu erwarten. Trotzdem wird man mit Rücksicht auf den rasch anwachsenden Bedarf und auf die ungleichmäßige Wasserführung der Flüsse, die zur Spitzendeckung im Winter nicht ausreicht, auf thermische Kraftwerke nicht verzichten können. Da die heimischen Braunkohlenvorräte in wenigen Jahren zur Neige gehen dürften, wird auch Österreich allmählich dazu übergehen müssen, einen Teil seines Bedarfes aus Kernkraftwerken zu decken. Die Betonung ist dabei auf das Wort allmählich zu legen, denn solange noch Inlandkohle zur Verfügung steht, wird man die Dampfkraftwerke billiger mit diesem heimischen Produkt betreiben können. Jedes Jahr Zuwarten bedeutet dabei insofern einen Gewinn, als mit ziemlicher Sicherheit damit zu rechnen ist, daß die Kernreaktoren, die man in etwa fünf Jahren auf Grund der inzwischen gesammelten Erfahrungen erbauen kann, sowohl hinsichtlich der Anlagekosten je MW Leistung wie auch hinsichtlich der Brennstoffkosten je kWh gelieferter Energie rund halb so teuer sein werden wie irgend etwas, das man heute bekommen kann.

### Das Problem der Wärmepumpe

Wenn Österreich im Laufe der nächsten Generation zu einem relativ stark elektrifizierten Land mit 40 bis 50 TWh Jahresverbrauch geworden sein wird, und wenn sodann in 30 bis 40 Jahren nach Erschöpfung der heimischen Reserven an Erdöl, Erdgas und Kohle der Bedarf an Brennstoffen durch Importe gedeckt werden muß, dann wird die Frage einer immer weitgehenderen Einführung elektrischer Heizung aktuell werden. Nun wird die an sich so überaus bequeme und dabei reinliche Methode der elektrischen Widerstandsheizung leider auch schon heute in vielen Gegenden weitgehend benützt. „Leider“ darum, weil es vom Standpunkt des technischen Gewissens aus eine schwere Sünde ist, hochwertige elektrische Energie direkt in die ökonomisch niedriger bewertete Wärme umzuwandeln. Man darf nicht vergessen, daß die Widerstandsheizung nicht mehr als 860 kcal/kWh liefert, während zur Elektrizitätserzeugung in unseren gegenwärtigen Dampfkraftzentralen rund 4000 kcal/kWh aufgewendet werden. Widerstandsheizung ist daher eine Vergeudung, die man so lange in Kauf nehmen kann, als es sich um relativ kleine Energiemengen handelt. Wenn aber später einmal die Elektroheizung in einem Umfang aufgenommen werden sollte, daß sie uns die Kohlenimporte ersparen kann, dann würde der Verbrauch 10 Milliarden kWh jährlich übersteigen und in diesem Falle könnte die österreichische Wirtschaft durch allgemeine Einführung der Wärmepumpen sehr beträchtliche Ersparnisse erzielen. Bei einem Leistungsfaktor von 3·5 liefert die Wärmepumpe rund 3000 kcal/kWh derart, daß mit nur 10 % der im Jahre 1985 zu erwartenden hydroelektrischen Produktion Österreichs etwa 12 Billionen kcal Wärme erzeugt werden könnten, was den Bedarf für Wohnungsheizung im ganzen Bundesgebiet decken könnte und damit Kohlenimporte im Werte von 1 bis 2 Milliarden Schilling jährlich ersparen würde. Dazu kämen noch weitere Vorteile, die sich zwar nicht direkt in Ziffern ausdrücken lassen, die aber dennoch von großer praktischer Bedeutung sind: Erleichterung der Haushaltsarbeit durch Wegfall der Manipulation mit Heizmaterial und Asche, Verminderung der Rauch- und Rußplage in den Städten und schließlich die Möglichkeit, die Wohnungen nicht nur im Winter zu heizen, sondern auch im Sommer zu kühlen.

Warum wird von einer Einrichtung, die gesteigerten Komfort mit größerer Wirtschaftlichkeit verbinden könnte, bisher nur an einzelnen Stellen und nur in geringem Maße Gebrauch gemacht? Wärmepumpen werden bisher in sehr beschränktem Ausmaße in der Schweiz, ein bißchen mehr in den Vereinigten Staaten und neuerdings auch in wenigen Exemplaren in England verwendet, aber von einer allgemeinen Einführung kann noch nirgendwo die Rede sein. Der Grund dazu liegt in dem



Umstand, daß unter den heutigen Verhältnissen die Anschaffungskosten einer Wärmepumpenanlage zu hoch sind, um trotz der verringerten laufenden Kosten einen Betrieb zu ermöglichen, der mit den konventionellen Heizungssystemen wirtschaftlich konkurrieren könnte. Der derzeit noch hohe Anschaffungspreis der Wärmepumpen ist jedoch keine durch hohen Materialaufwand naturbedingte Tatsache, sondern rührt nur daher, daß noch keine Serienproduktion aufgenommen wurde. Würde man Wärmepumpen am laufenden Band wie Autos herstellen und würde der Ankauf solcher Geräte durch billige Kredite erleichtert werden, dann könnten die wirtschaftlichen und anderen Vorteile dieser Beheizungsart in einer nicht zu fernen Zukunft voll zur Geltung kommen. In England sind diesbezügliche Bestrebungen bereits im Gange und es ist mit der Möglichkeit zu rechnen, daß die British Motor Corporation in einigen Jahren die Serienerzeugung von Wärmepumpen für den Haushaltsgebrauch aufnehmen wird. Sie könnte damit auf dem Gebiete des Heizungswesens eine Tat vollbringen, die etwa mit dem zu vergleichen wäre, was Henry Ford vor mehr als einem halben Jahrhundert für den Automobilismus getan hatte.

Allerdings liegen die städtebaulichen und klimatischen Verhältnisse in England in Hinblick auf die Wärmepumpe etwas günstiger als in Österreich. In dem ozeanischen Klima der britischen Inseln sind sowohl die Küstengewässer als auch zahlreiche Flüsse das ganze Jahr hindurch genügend weit vom Gefrierpunkt entfernt, um als Wärmequelle für die Wärmepumpe dienen zu können. Außerdem kann die Beheizung kleiner Einfamilienhäuser, in denen ein großer Prozentsatz der gesamten Bevölkerung Englands wohnt, auch durch Benützung der Bodenwärme oder des Grundwassers als Wärmequelle durchgeführt werden. Bei stärkerer Konzentration der Wohnungen in Zinshäusern reicht dagegen diese Art der Wärmequelle nicht aus. Im Falle Wiens zum Beispiel müßte das Donauwasser als Wärmequelle herangezogen werden, was in wirtschaftlicher Hinsicht aus zwei Gründen stark erschwert wird: Es müßte erstens ein eigenes Leitungssystem durch die ganze Stadt gelegt werden, was natürlich mit enormen Kosten verbunden ist, und zweitens bestünde die Gefahr des Versagens in extrem strengen Wintern, wenn die Temperatur des Donauwassers so nahe am Gefrierpunkt liegt, daß keine Wärmeentnahme ohne nachfolgendes Einfrieren der Leitungen mehr möglich ist. Zieht man anderseits die Tatsache der Ersparnis von Milliardenbeträgen in Betracht, so wird man leicht herausfinden können, daß selbst die großen Ausgaben einer eigenen Wasserleitung für Heizzwecke sich auf lange Sicht bezahlt machen würden.

Eine Abhilfe gegen das im Hochwinter zu kalte Flußwasser könnte gemäß einem in der Schweiz schon einmal diskutierten Projekt in der Weise gefunden werden, daß man in großen wärmeisolierten Reservoirs mit Fassungsräumen in der Größenordnung von  $10^8 \text{ m}^3$  Wasser vom Sommer her speichert und im Bedarfsfall an Stelle des Donauwassers in die Leitungen verteilt. Derartige Reservoirs ließen sich beispielsweise im Zusammenhang mit den Staubecken errichten, die längs der geplanten Kette der Donaukraftwerke in der Wiener Umgebung gebaut werden sollen. Hier würde sich auch die Möglichkeit einer wenigstens teilweisen Ausnützung der Sonnenenergie ergeben. Man könnte nämlich das Reservoir mit einem geschwärzten Dach versehen, das bei Tag der Sonnenstrahlung ausgesetzt wird, nach Sonnenuntergang dagegen durch eine jalousienartige Vorrichtung gegen Ausstrahlung und Wärmekonvektion geschützt ist. Im National Physical Laboratory of Israel wurde von H. Tabor ein für Speicherung der Sonnenwärme bestimmter Anstrich entwickelt, der die Eigenschaft hat, „selektiv schwarz“ zu sein, indem er im sichtbaren Spektralbereich (in dem die Sonnenstrahlung ihr Maximum besitzt) ein großes Absorptionsvermögen aufweist, dagegen im Infrarot kleines Absorptionsvermögen und dementsprechend auch geringes Emissionsvermögen hat. Die mit einem derartigen Anstrich

versehenen Flächen wirken als „Strahlenfalle“ und werden im Sonnenlicht zu noch höherer Temperatur aufgeheizt als einfach berußte Flächen. In der geographischen Breite von Wien kann man an sonnigen Hochsommertagen mit einer gesamten Einstrahlung von 5000 kcal je Tag und Quadratmeter einer horizontalen Fläche rechnen. Und da das große Reservoir eine Fläche von einigen Quadratkilometern einnehmen müßte, so würden sonnige Tage mehrere Milliarden Kalorien liefern, von denen bei guter Ausführung der Strahlenfalle und der Wärmeisolation ein sehr erheblicher Bruchteil bis zum Winter gespeichert werden könnte.

Natürlich handelt es sich hier um gigantische Bauvorhaben, die für unsere Generation noch nicht in Frage kommen, die sich aber in einem vollelektrifizierten Österreich im Laufe der Zeit gut bezahlt machen würden. Man darf nicht vergessen, daß selbst der kleinste Kraftreaktor mit 11·5 MW elektrischer Leistung rund hundert Millionen Schilling kostet. Bei der Frage der Vollelektrifizierung der österreichischen Haushalte handelt es sich aber um Leistungen, die um rund zwei Zehnerpotenzen höher liegen, und daher wird auch zu gegebener Zeit ein entsprechender Aufwand gerechtfertigt sein. Hier liegen — auch ganz abseits von dem jetzt soviel bearbeiteten Gebiet der Kernenergie — sehr interessante Aufgaben für die Physiker und Ingenieure vor, deren Lösung für die Volkswirtschaft und das Allgemeinwohl der Bevölkerung von größtem Nutzen sein kann.

(Eingegangen am 29. Februar 1956)

## Membranspannungszustand im elliptischen Paraboloid

Von E. Tügl, Wien

Mit 3 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Die Lösung für den Membranspannungszustand in einem elliptischen Paraboloid über rechteckigem Grundriß wird unter Annahme einer von zwei Parametern abhängigen Vertikalbelastung in analytischer Form gegeben.

Im folgenden wird in analytischer Form die Lösung für den Membranspannungszustand einer doppelt gekrümmten Schale (und zwar elliptisches Paraboloid) konstanter oder veränderlicher Wandstärke entwickelt. Probleme dieser Art sind zumeist nur näherungsweise mit Hilfe der Differenzenrechnung gelöst worden.

1. Es sei  $z = z(x, y)$  die Gleichung der Mittelfläche. Die Linien  $x = \text{konst.}$  und  $y = \text{konst.}$  bilden auf dieser ein Netz von gekrümmten Koordinatenlinien. Je vier paarweise benachbarte Koordinatenlinien schließen ein Flächenelement ein, dessen Projektion auf die  $x, y$ -Ebene ein Rechteck bildet. Am betrachteten Element greifen die auf die Grundrißeinheit bezogene lotrechte Kraft  $Z$  und tangential gerichtete innere Kräfte an, die längs jedes Randes parallel zu den Koordinatenlinien in die Komponenten (Abb. 1)  $S_1, S_2, T$  je Einheit Schnittlänge zerlegt werden. Diesen Schnittkräften entsprechen an der Grundrißprojektion

$$\bar{n}_x = S_1 \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, \quad \bar{n}_y = S_2 \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}, \quad \bar{n}_{xy} = T, \quad (1)$$

wenn  $\varphi$  und  $\psi$  die Neigungswinkel der Elementränder gegen die  $x$ - und  $y$ -Achse bedeuten. Zur Bestimmung des Schalenelementes ist ferner der Winkel  $\vartheta$  erforderlich:

$$\cos \vartheta = \sin \varphi \sin \psi = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]}}. \quad (2)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen des Schalenelementes in Richtung  $x, y, z$  liefern, wenn die  $S_1, S_2, T$  gemäß (1) durch die  $\bar{n}_x, \bar{n}_y, \bar{n}_{xy}$  ausgedrückt werden, drei Differential-

gleichungen für die Grundriß-Schnittkräfte. Die beiden ersten dieser Gleichungen sind erfüllt, wenn die  $\bar{n}$  gemäß

$$\bar{n}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \bar{n}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \bar{n}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

aus einer Spannungsfunktion  $F(x, y)$  gewonnen werden. Die dritte Gleichgewichtsbedingung lautet dann mit (3)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -Z \quad (4)$$

und dient zur Bestimmung der Spannungsfunktion  $F$ . Diese Beziehungen wurden bereits von Pucher<sup>1</sup> abgeleitet.

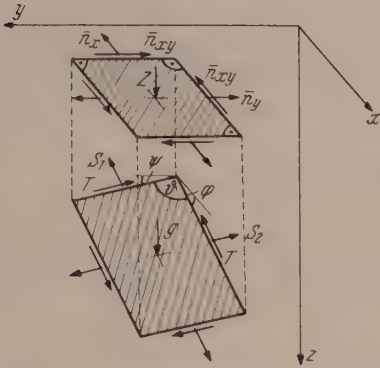


Abb. 1

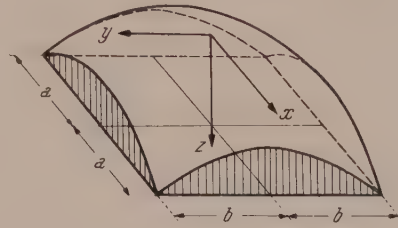


Abb. 2

Ist die vorgegebene lotrechte Belastung pro Einheit Schalenfläche  $g(x, y)$ , dann lautet die in Rechnung zu stellende Lastkomponente

$$Z = g \frac{\sin \vartheta}{\cos \varphi \cos \psi} = g \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad (5)$$

2. Auf Grund dieser allgemeinen Beziehungen werden die Membranspannungen in einer elliptischen Paraboloidschale (Abb. 2) mit der Mittelfächengleichung

$$z = \frac{x^2}{2p^2} + \frac{y^2}{2q^2} \quad (6)$$

unter der Belastung pro Grundrißflächeneinheit

$$Z = g_0 (1 + k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2) \quad (7)$$

( $g_0, k_1, k_2$  sind beliebige Konstanten) abgeleitet. Die Schale soll einen rechteckigen Grundriß mit den Abmessungen  $2a \cdot 2b$  überdecken und als Randbedingungen werden vorgeschrieben

$$\text{in } x = \pm a: \bar{n}_x = 0, \text{ also } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0; \quad \text{in } y = \pm b: \bar{n}_y = 0, \text{ also } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

Die Differentialgleichung (4) lautet dann

$$\frac{1}{q^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -Z = -g_0 \left( \frac{1}{2} + k_1^2 x^2 \right) - g_0 \left( \frac{1}{2} + k_2^2 y^2 \right) = -Z_1 - Z_2. \quad (9)$$

Die Zerlegung der rechten Gleichungsseite erfolgte deshalb, weil zunächst die Lösung  $F_1$  für die Gleichung mit der rechten Seite gleich  $-Z_1$  ermittelt und die analog aufgebaute Lösung  $F_2$  dann gemäß

$$F = F_1 + F_2 \quad (10)$$

überlagert wird. Es ist daher vorerst die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{q^2}{p^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = -g_0 q^2 \left( \frac{1}{2} + k_1^2 x^2 \right) \quad (11)$$

<sup>1</sup> A. Pucher: Über den Spannungszustand in gekrümmten Flächen. Beton u. Eisen 33, 298 (1934).



mit den auch für  $F_1$  gültigen Randbedingungen (8) zu lösen. Ein partikuläres Integral dieser Gleichung ist  $-g_0 q^2 \left( \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{12} k_1^2 \right)$ . Die Lösung  $F_{1,0}$  der homogenen Gleichung wird aus einem Produkt einer reinen Funktion von  $x$  und einer reinen Funktion von  $y$  zusammengesetzt:  $F_{1,0} = \Phi(x) \Psi(y)$ . Die Einführung dieses Lösungsansatzes in die homogene Gl. (11) liefert

$$\Phi \Phi'' + \frac{q^2}{p^2} \Phi \Psi'' = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{q^2}{p^2} \frac{\Psi''}{\Psi} = 0. \quad (12)$$

Da voraussetzungsgemäß  $\Phi$  nur von  $x$  und  $\Psi$  nur von  $y$  abhängt, muß jedes Glied der linken Gleichungsseite (12/2) einer zunächst beliebigen Konstanten  $-\alpha^2$  bzw.  $+\alpha^2$  gleich sein, wobei die Vorzeichen im Hinblick auf die zu erfüllenden Randbedingungen geeignet gewählt wurden. Die Gl. (12/2) zerfällt somit in die beiden Beziehungen

$$\Phi'' + \alpha^2 \Phi = 0, \quad \Psi'' - \frac{p^2}{q^2} \alpha^2 \Psi = 0. \quad (13)$$

Bei Berücksichtigung der Symmetrie der Schale und Belastung sowohl in Richtung  $x$  als auch  $y$  kommen nur die Lösungen  $\Phi = A \cos \alpha x$ ,  $\Psi = B \cos \frac{p}{q} \alpha y$  in Betracht und es kann geschrieben werden:

$$F_{1,0} = \Phi(x) \Psi(y) = \sum_n C_n \cos \alpha_n x \cos \frac{p}{q} \alpha_n y. \quad (14)$$

Mit der oben angegebenen Partikulärlösung lautet das Integral der Gl. (11)

$$F_1 = \sum_n C_n \cos \alpha_n x \cos \frac{p}{q} \alpha_n y - g_0 q^2 \left( \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{12} k_1^2 \right), \quad (15)$$

mit den zweiten Ableitungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} &= \frac{p^2}{q^2} \sum_n \alpha_n^2 C_n \cos \alpha_n x \cos \frac{p}{q} \alpha_n y, \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} &= - \sum_n \alpha_n^2 C_n \cos \alpha_n x \cos \frac{p}{q} \alpha_n y - g_0 q^2 \left( \frac{1}{2} + k_1^2 x^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Die Randbedingung (8/1) für  $F_1$  liefert

$$\cos \alpha_n a = 0, \quad \text{also} \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{2a}, \quad n = 1, 3, 5 \dots \quad (17)$$

und die Randbedingung (8/2) für  $F_1$  lautet damit

$$\frac{\pi^2}{4a^2} \sum_n n^2 C_n \cos \frac{n\pi x}{2a} \cos \frac{p}{q} \frac{n\pi b}{2a} + g_0 q^2 \left( \frac{1}{2} + k_1^2 x^2 \right) = 0, \quad (n = 1, 3, 5 \dots). \quad (18)$$

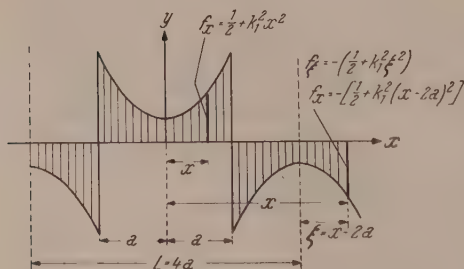


Abb. 3

Um hieraus die  $C_n$  zu erhalten, muß man den Faktor  $\frac{1}{2} + k_1^2 x^2$  durch eine Fourier-Reihe  $\frac{1}{2} + k_1^2 x^2 = \sum_n a_n \cos \frac{n\pi x}{2a}, \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (19)$

darstellen. Zu diesem Zweck wird der zu entwickelnde Ausdruck  $f_x$  als gerade Funktion von  $x$  mit der Periode  $L = 4a$  fortgesetzt gedacht (Abb. 3). Die Fourier-Koeffizienten  $a_n$  erhält man dann aus

$$a_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} f_x \cos \frac{2n\pi x}{L} dx =$$

$$= \frac{1}{a} \left\{ \int_0^a \left( \frac{1}{2} + k_1^2 x^2 \right) \cos \frac{n\pi x}{2a} dx - \int_a^{2a} \left( \frac{1}{2} + k_1^2 (x - 2a)^2 \right) \cos \frac{n\pi x}{2a} dx \right\}$$

zu

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left[ 1 + 2a^2 k_1^2 \left( 1 - \frac{8}{n^2 \pi^2} \right) \right] \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (20)$$

Es folgt nun aus (18) mit Benützung von (19) und (20) sowie unter Beachtung von  $\sin \frac{n\pi}{2} = -(-1)^{\frac{n+1}{2}}$

$$C_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{8g_0 q^2 a^2}{n^3 \pi^3} \frac{1 + 2a^2 k_1^2 \left( 1 - \frac{8}{n^2 \pi^2} \right)}{\cos \frac{p}{q} \frac{n\pi b}{2a}}. \quad (21)$$

Die Teilspannungsfunktion lautet somit gemäß (15)

$$F_1 = \frac{8g_0 q^2 a^2}{\pi^3} \sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1 + 2a^2 k_1^2 \left( 1 - \frac{8}{n^2 \pi^2} \right)}{n^3 \cos \frac{p}{q} \alpha_n b} \cos \alpha_n x \cos \frac{p}{q} \alpha_n y -$$

$$- g_0 q^2 \left( \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{12} k_1^2 \right) \quad (22)$$

und die zugehörigen Grundrißschnittkräfte folgen hieraus nach (3) mit der Hilfsgröße

$$A_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1 + 2a^2 k_1^2 \left( 1 - \frac{8}{n^2 \pi^2} \right)}{n\pi \cos \frac{p}{q} \alpha_n b} \quad (23)$$

zu

$$\left. \begin{aligned} (\bar{n}_x)_1 &= 2g_0 p^2 \sum_n A_n \cos \alpha_n x \cos \frac{p}{q} \alpha_n y, \\ (\bar{n}_y)_1 &= -2g_0 q^2 \sum_n A_n \cos \alpha_n x \cos \frac{p}{q} \alpha_n y - g_0 q^2 \left( \frac{1}{2} + k_1^2 x^2 \right), \\ (\bar{n}_{xy})_1 &= 2g_0 p q \sum_n A_n \sin \alpha_n x \sin \frac{p}{q} \alpha_n y, \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

wobei  $\alpha_n$  durch Gl. (17) bestimmt ist. Diese Schnittkräfte gehören gemäß (9) zur Teilbelastung  $Z_1 = g_0 \left( \frac{1}{2} + k_1^2 x^2 \right)$ . Die Schnittkräfte  $(\bar{n}_x)_2$ ,  $(\bar{n}_y)_2$ ,  $(\bar{n}_{xy})_2$  zur Teilbelastung  $Z_2 = g_0 \left( \frac{1}{2} + k_2^2 y^2 \right)$  können mit Benützung der Hilfsgrößen

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1 + 2b^2 k_2^2 \left( 1 - \frac{8}{n^2 \pi^2} \right)}{n\pi \cos \frac{q}{p} \beta_n a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{2b} \quad (25)$$

in analoger Weise angeschrieben werden. Die Gesamtschnittkräfte  $\bar{n} = (\bar{n})_1 + (\bar{n})_2$  in der Grundrißprojektion der Schale unter der Belastung (7) lauten daher

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{n}_x &= g_0 p^2 \left\{ 2 \sum_n \left[ A_n \cos \alpha_n x \cos \frac{p}{q} \alpha_n y - B_n \cos \beta_n y \cos \frac{q}{p} \beta_n x \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{1}{2} + k_2^2 y^2 \right) \right\}, \\
 \bar{n}_y &= g_0 q^2 \left\{ 2 \sum_n \left[ B_n \cos \beta_n y \cos \frac{q}{p} \beta_n x - A_n \cos \alpha_n x \cos \frac{p}{q} \alpha_n y \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{1}{2} + k_1^2 x^2 \right) \right\}, \\
 \bar{n}_{xy} &= 2 g_0 p q \sum_n \left[ A_n \sin \alpha_n x \sin \frac{p}{q} \alpha_n y + B_n \sin \beta_n y \sin \frac{q}{p} \beta_n x \right], \\
 &\quad (n = 1, 3, 5 \dots)
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Die Schnittkräfte in der Schale werden hieraus nach Gl. (1) bei Berücksichtigung der Mittelflächengleichung (6) mit Hilfe der Beziehungen

$$S_1 = \bar{n}_x \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{p^4}\right) \left(1 + \frac{y^2}{q^4}\right)}, \quad S_2 = \bar{n}_y \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{q^4}\right) \left(1 + \frac{x^2}{p^4}\right)}, \quad T = \bar{n}_{xy} \quad (27)$$

erhalten. Da das zugehörige Schalenelement ein Parallelogramm mit dem Winkel  $\vartheta$  ist, wird mit diesen Schnittkräften ein schiefachsiger Spannungszustand beschrieben. Die Normal- und Schubspannungen in der Schale, sowie auch die Hauptspannungen können jedoch mit den Mitteln der elementaren Festigkeitslehre hieraus ermittelt werden (s. loc. cit. Anm. 1).

Die der Rechnung zugrunde gelegte Belastung (7) entspricht gemäß (5) einer Belastung pro Schalenflächeneinheit von

$$g = g_0 \frac{1 + k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4}}}. \quad (28)$$

3. Sonderfall: Rotationsparaboloid über quadratischem Grundriß unter rotations-symmetrischer Belastung. Die Mittelflächengleichung (6) lautet hier

$$z = (x^2 + y^2)/2C. \quad (29)$$

Die Belastung pro Schalenflächeneinheit sei

$$g = g_0 \frac{1 + k^2 (x^2 + y^2)}{\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{C^2}}} \quad (30)$$

und die Abmessungen des Grundrißquadrates  $2a$ . Es ist also

$$b = a, \quad p^2 = q^2 = C, \quad k_1 = k_2 = k, \quad \alpha_n = \beta_n = \frac{n\pi}{2a}, \quad (31)$$

ferner

$$A_n = B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n\pi \cos \frac{n\pi}{2}} \left[ (1 + 2a^2 k^2) - \frac{16a^3 k^2}{n^2 \pi^2} \right] \quad (32)$$

und die Gl. (26) können geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{n}_x &= g_0 C \left\{ \frac{2}{\pi} \left[ (1 + 2a^2 k^2) (R_1 - R_2) - \frac{16a^3 k^2}{\pi^2} (R_3 - R_4) \right] - \left( \frac{1}{2} + k^2 y^2 \right) \right\}, \\
 \bar{n}_y &= g_0 C \left\{ -\frac{2}{\pi} \left[ (1 + 2a^2 k^2) (R_1 - R_2) - \frac{16a^3 k^2}{\pi^2} (R_3 - R_4) \right] - \left( \frac{1}{2} + k^2 x^2 \right) \right\} = \\
 &\quad = -\bar{n}_x - g_0 C [1 + k^2 (x^2 + y^2)], \\
 \bar{n}_{xy} &= \frac{2g_0 C}{\pi} \left[ (1 + 2a^2 k^2) (R_5 + R_6) - \frac{16a^3 k^2}{\pi^2} (R_7 + R_8) \right],
 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$



wobei die  $R_1$  bis  $R_8$  folgende unendliche Reihen bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\cos \frac{n\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a}}{n \cos \frac{n\pi}{2}}, & R_2 &= \sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\cos \frac{n\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a}}{n \cos \frac{n\pi}{2}}, \\ R_3 &= \sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\cos \frac{n\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a}}{n^3 \cos \frac{n\pi}{2}}, & R_4 &= \sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\cos \frac{n\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a}}{n^3 \cos \frac{n\pi}{2}}, \\ R_5 &= \sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2a}}{n \cos \frac{n\pi}{2}}, & R_6 &= \sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2a}}{n \cos \frac{n\pi}{2}}, \\ R_7 &= \sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2a}}{n^3 \cos \frac{n\pi}{2}}, & R_8 &= \sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2a}}{n^3 \cos \frac{n\pi}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$(n = 1, 3, 5 \dots)$ .

In der Differentialgleichung (9) könnte die rechte Seite auch in  $-g_0(1 + k_1^2 x^2) - g_0 k_2^2 y^2$  zerlegt werden. Ein Vergleich der so erhaltenen Lösung mit Gl. (26) ergibt

$$\sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\cos \alpha_n x \cos \frac{p}{q} \alpha_n y}{n \pi \cos \frac{p}{q} \alpha_n b} + \sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\cos \beta_n y \cos \frac{q}{p} \beta_n x}{n \pi \cos \frac{q}{p} \beta_n a} = -\frac{1}{4},$$

$$\sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sin \alpha_n x \sin \frac{p}{q} \alpha_n y}{n \pi \cos \frac{p}{q} \alpha_n b} = \sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sin \beta_n y \sin \frac{q}{p} \beta_n x}{n \pi \cos \frac{q}{p} \beta_n a}, \quad (n = 1, 3, 5 \dots).$$

Daher gilt  $R_2 = -\left(R_1 + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $R_5 = R_6$  und die Gln. (33) gehen für  $k^2 = 0$  (konstante Grundrißbelastung) in die bei Flügge<sup>2</sup> angegebenen Beziehungen ( $x$  und  $y$  vertauscht) über.

Der allen Reihengliedern (34) gemeinsame Nennerfaktor  $\cos \frac{n\pi}{2}$  darf für große  $n$  (bei den durchgeführten Zahlenrechnungen wurde  $n \geq 5$  gewählt) durch  $\frac{1}{2} e^{\frac{n\pi}{2}}$  ersetzt werden. Für die in den Zählern auftretenden Hyperbelfunktionen kann jeweils eine Zahl  $m$  (abhängig von  $x$  bzw.  $y$ ) angegeben werden, so daß man für alle  $n \geq m$  setzen darf

$$\sin \frac{n\pi x}{2a} \doteq \cos \frac{n\pi x}{2a} \doteq \frac{1}{2} e^{\frac{n\pi x}{2a}}, \quad \sin \frac{n\pi y}{2a} \doteq \cos \frac{n\pi y}{2a} \doteq \frac{1}{2} e^{\frac{n\pi y}{2a}}, \quad n \geq m.$$

Da die Reihen  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_5$ ,  $R_6$  summiert werden können, wenn an Stelle der Hyperbelfunktionen Exponentialfunktionen stehen, erhält man folgende Beziehungen:

<sup>2</sup> W. Flügge: Das Relaxationsverfahren in der Schalenstatik. Federhofer-Girkmann-Festschrift. Wien: Deuticke. 1950.

$$\left. \begin{aligned}
 R_1 &= \sum_{1,3}^{m-2} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n} \left[ \frac{\cos \frac{n\pi y}{2a}}{\cos \frac{n\pi}{2}} - e^{-\frac{n\pi}{2} \left(1 - \frac{y}{a}\right)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos \frac{\pi x}{2a}}{\sin \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{\pi}{2}}, \quad \left(\frac{y}{a} \neq 0\right), \\
 R_1 &= \sum_1^3 (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{\cos \frac{n\pi}{2}} - 2e^{-\frac{n\pi}{2}} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos \frac{\pi x}{2a}}{\sin \frac{\pi}{2}}, \quad \left(\frac{y}{a} = 0\right), \\
 R_1 &= -\frac{\pi}{4}, \quad \left(\frac{y}{a} = 1\right), \\
 R_5 &= \sum_{1,3}^{m-2} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n} \left[ \frac{\sin \frac{n\pi y}{2a}}{\cos \frac{n\pi}{2}} - e^{-\frac{n\pi}{2} \left(1 - \frac{y}{a}\right)} \right] \sin \frac{n\pi x}{2a} - \\
 &\quad - \frac{1}{4} \ln \frac{\cos \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi x}{2a}}{\cos \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi x}{2a}}, \quad \left(\frac{y}{a} \neq 0\right).
 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Die analogen Ausdrücke für  $R_2$  und  $R_6$  werden hieraus gemäß (34) durch Vertauschen von  $x$  und  $y$  gewonnen. Von den rascher konvergierenden Reihen  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_7$ ,  $R_8$  kann nur die Summe

$$R_3 = -\frac{\pi^3}{32} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad \left(\frac{y}{a} = 1\right) \quad (36)$$

geschlossen angegeben werden.

Für die numerische Auswertung der Gln. (33) sind im folgenden einige Zahlenwerte der Ausdrücke  $(R_1 - R_2)$ ,  $(R_3 - R_4)$ ,  $(R_5 + R_6)$ ,  $(R_7 + R_8)$  angeführt:

$\frac{y}{a}$	$(R_1 - R_2)$ für		$(R_3 - R_4)$ für		$(R_5 + R_6)$ für		$(R_7 + R_8)$ für	
	$\frac{x}{a}=0$	$\frac{x}{a}=0,5$	$\frac{x}{a}=0$	$\frac{x}{a}=0,5$	$\frac{x}{a}=0,5$	$\frac{x}{a}=1$	$\frac{x}{a}=0,5$	$\frac{x}{a}=1$
0	0	+0.2135	0	+0.2422	0	0	0	0
0.25	-0.0537	+0.1636	-0.0606	+0.1816	-0.2138	-0.3399	-0.2423	-0.4846
0.3	-0.0773	+0.1409	-0.0872	+0.1550	-0.2581	-0.4146	-0.2907	-0.5814
0.4	-0.1372	+0.0811	-0.1550	+0.0872	-0.3484	-0.5770	-0.3876	-0.7752
0.5	-0.2136	0	-0.2422	0	-0.4406	-0.7643	-0.4845	-0.9689
0.6	-0.3055	-0.1054	-0.3488	-0.1066	-0.5327	-0.9901	-0.5814	-1.1627
0.7	-0.4115	-0.2379	-0.4748	-0.2325	-0.6199	-1.2791	-0.6782	-1.3563
0.8	-0.5291	-0.3987	-0.6201	-0.3779	-0.6944	-1.6851	-0.7782	-1.5502
0.9	-0.6550	-0.5844	-0.7848	-0.5426	-0.7458	-2.3783	-0.8721	-1.7441
1.0	{ $= -\pi/4$		{ $= -\pi/4$		-0.7854	$= -\infty$	-0.9690	$= -\infty$

Aus den Grundrißschnittkräften (33) werden die Schalenschnittkräfte gemäß (27) mittels der Beziehungen

$$S_1 = \bar{n}_x \sqrt{\frac{x^2 + C^2}{y^2 + C^2}}, \quad S_2 = \bar{n}_y \sqrt{\frac{y^2 + C^2}{x^2 + C^2}}, \quad T = \bar{n}_{xy} \quad (37)$$

gewonnen.

(Eingegangen am 16. März 1956)



## Buchbesprechungen

**Calcul numérique des plaques et des parois minces.** Von *P. Dubas*. (Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich: Nr. 27.) Mit 67 Textabb., 175 S. Zürich: Verlag Leemann. 1955.

Die Arbeit stellt eine Anwendung des von Professor Stüssi, Zürich, entwickelten Seilpolygonverfahrens dar, das auch für die vereinfachte Untersuchung von belasteten plattenförmigen Körpern geeignet erscheint. Es kann in diesem Falle als eine Weiterentwicklung des von Dr. Marcus ausgearbeiteten Verfahrens für „elastische Gewebe“ angesehen werden. In der vorliegenden Arbeit wird nachgewiesen, daß die Genauigkeit der Ergebnisse gegenüber denjenigen nach dem Verfahren von Marcus wesentlich höher ist. Als ein Vorzug der Arbeit ist auch die Ausführlichkeit der Darlegungen hervorzuheben, mit der der Verfasser sowohl die Grundlagen der Theorie der Platten und Scheiben, als auch die Eigenheiten des angewandten und der anderen Näherungsverfahren erläutert. Weiterhin erscheinen die zur Erläuterung herangezogenen Zahlenbeispiele bemerkenswert, insbesondere diejenigen, die die Anwendung des Verfahrens auf Scheibenprobleme behandeln und aus denen durch Vergleich mit den exakten Lösungen die Brauchbarkeit der Methode auch für diese Art der Plattenbelastung dargetan wird. Zu der letzten Gruppe zählen auch diejenigen Anwendungsfälle, bei denen auf Grund der „Seilpolygonmethode“ Stabilitätsprobleme der Platten behandelt werden.

Mit Rücksicht auf die nachgewiesene vielseitige Anwendbarkeit und auf die ausgezeichnete Art der Darstellung kann das Buch auch dem Praktiker bestens empfohlen werden.

*P. Cicin, Wien*

**Die Maßsysteme in Physik und Technik.** Kritische Untersuchung der Grundlagen zur Aufstellung einwandfreier Maßsysteme und Vergleich der bestehenden Systeme in Physik und Technik. Von *G. Oberdorfer*. VI, 140 S. Wien: Springer-Verlag. 1956. S 96.—, DM 16.—, \$ 3.80, sfr. 16.30.

Eigentlich als die 2. Auflage von „Das natürliche Maßsystem“ gedacht, ließ der Verfasser das Buch jetzt in wesentlich vollständigerer und abgerundeterer Form erscheinen. Die Ausführungen gliedern sich grundsätzlich in zwei Teile: Die theoretischen Grundlagen für die Aufstellung von Maßsystemen und eine kritische Besprechung der meisten bekannten Systeme. Ein ausführlicher Tafelanhang erlaubt die wichtigsten Faktoren für die Umrechnung von ein in ein anderes Maßsystem aufzufinden, wobei auch angelsächsische Einheiten Berücksichtigung fanden.

Im Beginn seiner Untersuchungen geht der Verfasser von Größengleichungen aus (Größe = Maßzahl  $\times$  Einheit). Es wird bewiesen, daß Größengleichungen immer durch Potenzprodukte gegeben sind, als Qualität irgendeiner Einheit wird deren Dimension angegeben. Man könnte aber auch eine Größe als die (nach bestimmten Vorschriften zu messende) Qualität einer physikalischen Erscheinung definieren, was hier nicht geschieht. Die Dimension einer Einheit soll als Hilfe bei der Erkenntnis auch als Kontrolle dienen, aber man bedarf ihrer bei den Zahlenrechnungen der Technik nicht, da hier ja meist mit den naheliegendsten Einheiten, nicht aber mit Dimensionen oder auch Grundeinheiten gerechnet wird. Größengleichungen zerfallen in Definitionsgleichungen und Proportionalitäten; die letzteren sind das Ergebnis eines Experimentes und enthalten stets einen dadurch gegebenen dimensionsbehafteten Faktor. Die Anzahl der in ihnen vorkommenden Größen weniger der Anzahl der Gleichungen liefert die Zahl der zu wählenden Grundgrößen (und Dimensionen): Der Verfasser postuliert für Mechanik und Wärmelehre drei — für die Dimension der Temperatur führt er die Energie je Partikel (1 Clausius = 1 Joule/ $10^{24}$  Partikel) ein —, in der Elektromagnetik benötigt man vier. Der Stand der Forschung hält noch die Einführung magnetischer Mengen (Dirac) für unnötig. Diese geforderte Anzahl erscheint dem Referenten doch im wesentlichen eine Funktion des wissenschaftlichen Fortschrittes und wohl auch der persönlichen Ansicht zu sein, welche Gleichungen nun als Proportionalitäten anzusehen seien. Hier ist die Induktion  $B$  die kennzeichnende Größe des Magnetfeldes (magnetische Feldstärke genannt), während die Rechengröße  $H$  magnetische Erregung heißt.

Im weiteren vertritt der Verfasser die Ansicht, daß gebrochene Exponenten der Einheiten oder Dimensionen notwendig eine falsche oder zumindest ungünstige Wahl der Grundgröße — Grunddimension — erkennen lassen, schreibt er doch dem Dimensionssystem (das mit dem Einheiten- und Urmaßsystem ein Maßsystem bildet) eine hervorragende Bedeutung zu. Durch die mechanische Definition und die Wahl der Stromeinheit (1 A) wird die Größe der Induktionskonstante  $\mu_0$  völlig frei gewählt. Allerdings wurde 1954 international verbindlich nur die Einheit des Stromes über eine Zahlenwertgleichung festgelegt (damit das System m, kg, s, A), nicht aber durch eine Größengleichung Systemzahl und -art.



Um die Frage nach verschiedenartigen Größen mit gleicher Dimension zu klären, führt der Verfasser die Essenz einer Dimension (Skalar, Pseudoskalar, Vektor und axialsymmetrischer Tensor) ein, die unter Benützung ihrer Verknüpfungsregeln für In- und Exprodukt eine eindeutige Unterscheidung gestatten (z. B. Arbeit und Drehmoment). Ausführlich wird auch das Arbeiten mit dimensionslosen Größen besprochen, die durch Integrationen, Quotientenbildung oder als Mengenbezeichnung in Gleichungen auftreten können, was besonders in der Wärmelehre als wesentlich erscheint.

Bei den Besprechungen der bestehenden Maßsysteme wird im Werk an den geeigneten Stellen stets auf die Fehler hingewiesen, die dadurch entstanden, daß man Zahlenwertgleichungen (Proportionalitäten) mit dem Faktor 1 als Größengleichungen ansah und somit in der Elektromagnetik das Vierer- durch nur ein Dreiersystem ersetzte. Der Verfasser bevorzugt das Kalantaroffsche Dimensionssystem, das an Stelle von  $l, t, m, J$  als Grunddimensionen  $l, t, W$  und wahlweise  $Q$  oder  $\Phi$  einführt. Wegen der Unanschaulichkeit der Dimension einer Wirkung könnte man über seine Zweckmäßigkeit im Zweifel sein, trotz der angenehmen Symmetrie in den Ableitungen der anderen Dimensionen. Der Unterschied und die Möglichkeiten zwischen rationalen und nicht-rationalen Systemen werden eingehend behandelt. Tafeln und Zusammenstellungen gestatten eine leichte Übersicht.

Die kleinen Flüchtigkeitsfehler (Def. von  $p$  auf S. 16, drittletzte Zeile auf S. 19,  $1^\circ \text{K} = 1 \text{ Joule}/48,3 \cdot 10^{21} \text{ Part.}$  auf S. 106) tun dem Werk keinen Abbruch, das sehr anschaulich und eindeutig klar geschrieben ist. In der angeführten Literatur am Buchende vermißt man die grundlegenden Beiträge von Prof. R. Fleischmann, Erlangen, auch wenn darin entgegen der Ansicht des Verfassers für die Elektromagnetik ein Fünfersystem vorgeschlagen wird. Das Buch als Ganzes ist jedenfalls als ein begrüßenswerter interessanter Beitrag zu diesem noch heute wesentlichen Fragenkomplex in Physik und Elektrotechnik zu werten, der nicht nur viele Unklarheiten und Klippen aufzeigt, sondern auch ganz zu beseitigen versteht.

F. Bolhár-Nordenkampff, Wien

**Algebra.** Von B. L. van der Waerden. Unter Benützung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Vierte Auflage der modernen Algebra. I. Teil. VIII, 292 S. — Dritte Auflage der modernen Algebra. II. Teil. VIII, 224 S. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 33 und 34.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Je Band geb. DM 29,60.

Unter allen Darstellungen des Gegenstandes hat das bisher unter dem Titel „Moderne Algebra“ erschienene zweibändige Werk von van der Waerden seit der mehr als zwanzig Jahre zurückliegenden ersten Auflage einen besonderen Rang als Standardwerk, aber auch als leicht faßlich geschriebenes Lehrbuch eingenommen und bis heute erhalten. In der zweiten Auflage erfuhr das Werk eine weitgehende Umarbeitung, durch die einerseits die neuere Entwicklung, insbesondere der Theorie der Algebren, Berücksichtigung fand, anderseits der erste Band durch Einarbeiten gewisser Kapitel aus dem zweiten Band zu einer für den Anfänger besonders geeigneten Einführung erweitert wurde. In den nun vorliegenden Auflagen wurden nur einige kleine Ergänzungen neu aufgenommen und kleine Berichtigungen angebracht. Die Titeländerung trägt dem Umstande Rechnung, daß die vorgetragenen Theorien heute zum festen Bestande der Algebra gehören.

Die Ideen- und Begriffsbildungen der Algebra haben in fast alle Teile der Mathematik Eingang gefunden und in vielen Richtungen den Anstoß zu neuen Betrachtungsweisen gegeben. Aber auch in wichtigen Anwendungsgebieten der Mathematik, insbesondere in der Theoretischen Physik, haben sie sich als unentbehrliches und außerordentlich fruchtbares Werkzeug bewährt. So wird der Physiker oder wissenschaftlich arbeitende Ingenieur oft nicht ohne gründliche Kenntnis der Algebra auskommen. Auch ihm wird das vorliegende Werk, wie so vielen Mathematikern, einen zuverlässigen, leicht verständlichen und doch sehr weit führenden Zugang zu diesem Gebiet geben können.

E. Bukovics, Wien



Fortsetzung von der II. Umschlagseite

	Seite
<b>K. Prachar und L. Schmetterer</b> , Über eine spezielle nichtlineare Differentialgleichung . . . . .	247
<b>H. Reuter</b> , Zum gegenwärtigen Stand der numerischen Wettervorhersage . . . . .	252
<b>J. Rybarz</b> , Neue Wege der modernen Risikotheorie. (Mit 1 Textabbildung) . . . . .	260
<b>H. Sagan</b> , Über ein, einer selbstadjungierten Differentialgleichung zuordenbares dreidimensionales Variationsproblem . . . . .	264
<b>H. Schaefer</b> , Die drei Spannungsfunktionen des zweidimensionalen ebenen Kontinuums. (Mit 7 Textabbildungen) . . . . .	267
<b>F. Selig</b> , Bemerkungen zum Stefanschen Problem . . . . .	277
<b>Th. Söxl</b> , Zur systematischen Integration der Laplaceschen Differentialgleichung . . . . .	280
<b>A. Slibar</b> , Zur graphisch-numerischen Integration eines Simultansystems von gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Mit 2 Textabbildungen) . . . . .	288
<b>F. Steinhauser</b> , Der Tages- und Jahresgang der auf die horizontale Ebene und auf verschiedenen orientierte senkrechte Wände einfallenden Intensität der Sonnenstrahlung in verschiedenen Höhenlagen in Österreich. (Mit 1 Textabbildung) . . . . .	292
<b>H. Thirring</b> , Probleme der künftigen Energieerzeugung . . . . .	300
<b>E. Tungl</b> , Membranspannungszustand im elliptischen Paraboloid. (Mit 3 Textabbildungen) . . . . .	308
<b>W. Wunderlich</b> , Formeln und Rechenbehelfe zur Abwicklung des Kegels 2. Ordnung. (Diese, ebenfalls Paul Funk zum 70. Geburtstag gewidmete Arbeit erschien bereits in Band X, Heft 1, S. 107 ff.) . . . . .	315
<b>Buchbesprechungen</b> . . . . .	
Dubas, P., Calcul numérique des plaques et des parois minces (P. Cicin). — Oberdorfer, G., Die Maßsysteme in Physik und Technik (F. Bolhär-Nordenkampf). — Waerden, B. L. van der, Algebra (E. Bukovics).	

---

SPRINGER-VERLAG IN WIEN I

---

**Lehrbuch der Funktionentheorie.** Von Dr. phil. **Hans Hornich**, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Graz. Mit 34 Textabbildungen. VII, 216 Seiten. Gr.-8°. 1950. Steif geheftet S 117.—, DM 19.50, sfr. 19.80, \$ 4.70 Ganzleinen S 130.—, DM 21.60, sfr. 22.—, \$ 5.20

**Moderne algebraische Geometrie.** Die idealtheoretischen Grundlagen. Von Doktor **Wolfgang Gröbner**, o. Professor der Mathematik an der Universität Innsbruck. XII, 212 Seiten. Gr.-8°. 1949. Steif geheftet S 144.—, DM 23.90, sfr. 24.80, \$ 5.70

**Inhalt und Maß.** Von Dr. **Karl Mayrhofer**, o. Univ.-Prof. der Mathematik, wirkl. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien. Mit 17 Figuren. VIII, 269 Seiten. Gr.-8°. 1952. S 218.—, DM 36.—, sfr. 37.—, \$ 8.60 Ganzleinen S 236.—, DM 39.—, sfr. 40.—, \$ 9.30

**Grundlagen der höheren Geodäsie.** Von Dr. phil. **Friedrich Hopfner**, Professor der höheren Geodäsie und sphärischen Astronomie Wien. Mit 26 Textabbildungen. VIII, 246 Seiten. Gr.-8°. 1949. S 152.—, DM 25.—, sfr. 26.10, \$ 6.— Halbleinen S 162.—, DM 27.—, sfr. 27.80, \$ 6.40

**Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit.** Einführung in die neue Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung. Von Dr. **Richard von Mises**, Professor an der Harvard-Universität, Mass., USA. Dritte, neubearbeitete Auflage. IX, 278 Seiten. 8°. 1951. S 110.—, DM 18.—, sfr. 18.50, \$ 4.30

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung



*Soeben erschienen:*

# Einführung in die mathematische Statistik

Von

**Dr. Leopold Schmetterer**

Professor an der Universität Wien

Mit 13 Textabbildungen. XXIII, 405 Seiten. Gr.-8°. 1956

Ganzleinen S 294.—, DM 49.—, sfr. 50.10, \$ 11.65

Ein einführendes modernes Lehrbuch der mathematischen Statistik, das sich in erster Linie an den Mathematiker und an den mathematisch interessierten Statistiker wendet, hat in der deutschsprachigen Fachliteratur bisher gefehlt. Diesem fühlbaren Mangel entsprechend, hat der Verfasser, gestützt auf seine Vorlesungen an der Wiener Universität, das vorliegende Werk geschrieben, in dem er ausführlich auf die Ergebnisse der großartigen Entwicklungen der letzten 25 Jahre eingeht, die freilich zum großen Teil schon als klassisch bezeichnet werden können und mit den Namen *Fisher*, *Pearson* und insbesondere *Neyman* verknüpft sind. Darüber hinaus enthält das Buch auch neuere Ergebnisse, die sich bisher wohl kaum in einer zusammenfassenden Darstellung finden. Dem Studierenden soll mit diesem Buch die Möglichkeit geboten werden, sich mit den Grundlagen vertraut zu machen und jene Voraussetzungen zu erwerben, die für ein tieferes Eindringen in die Materie erforderlich sind. Eine Gegenüberstellung der deutschen Ausdrücke und der analogen Termini der englischen Literatur im Anhang bildet einen nützlichen Behelf für das Studium der fremdsprachigen Literatur.

---

# Konstruktive Geometrie für Techniker

Von

**Dr. Fritz Hohenberg**

o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Graz

Mit 432 Textabbildungen. IX, 272 Seiten. Gr.-8°. 1956

Steif geheftet S 117.—, DM 19.50, sfr. 20.—, \$ 4.65

Ganzleinen S 132.—, DM 22.—, sfr. 22.60, \$ 5.25

Das Buch ist eine Zusammenfassung der Vorlesungen „Darstellende Geometrie für Bauingenieure und Architekten“ und „Darstellende Geometrie für Maschinenbauer und Elektrotechniker“, die der Verfasser an der Technischen Hochschule in Graz hält. Es bietet die geometrischen Grundlagen des technischen Zeichnens. Mit einem geringen theoretischen Rüstzeug soll dem Techniker ein Optimum an praktischem Wissen und Können vermittelt werden. Auswahl und Darbietung des Stoffes richten sich nach technischen Bedürfnissen und Interessen. Zahlreiche moderne technische Anwendungen bauen dem Leser die Brücke von der Theorie zur Praxis und erhöhen den Wirkungsgrad des Studiums. So soll das Buch einen organischen Beitrag zum Werdegang des Ingenieurs oder Architekten geben. Der Aufbau des Buches ist elastisch genug, daß sich aus ihm einzelne Lehrgänge herausheben lassen, die verschiedenen technischen Studienrichtungen angepaßt sind. Das Buch wendet sich aber auch an den Mathematiker, vor allem an den Geometer, der sich für die technische Bedeutung und für die Anwendungen seiner Wissenschaft interessiert.

In Teil A werden Grund- und Aufriß, Axonometrie, Perspektive und Rekonstruktionen behandelt. Teil B bringt die Darstellung und konstruktive Behandlung von Drehflächen, Schraubflächen und anderen Flächen von technischer Bedeutung, sowie ein Kapitel über empirische Kurven und Flächen in kotierter Projektion. Teil C ist eine Einführung in die Geometrie der ebenen und räumlichen Getriebe und Verzahnungen.

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria